MÉCANIQUE DES FLUIDES

Sakir Amiroudine
Professeur à l'université Bordeaux 1

Jean-Luc Battaglia
Professeur à l'université Bordeaux 1



Illustration de couverture : © Digital Vision



ISBN 978-2-10-056922-9

TABLE DES MATIÈRES

Préface

Depuis plus de vingt ans, Jean-Luc Battaglia et Sakir Amiroudine sont des acteurs particulièrement actifs dans le vaste champ de la mécanique des fluides, dans nombre de ses aspects, tant de recherche que d'enseignement.

Leurs domaines de recherche, élaboration et caractérisation des matériaux dans des conditions extrêmes (la rentrée atmosphérique de véhicules spatiaux, par exemple), pour l'un, modélisation théorique et numérique de l'hydrodynamique des fluides complexes (les fluides en conditions supercritiques, par exemple), pour l'autre, les ont tout naturellement sensibilisés à une grande rigueur dans la définition des concepts de base de la mécanique des fluides, rigueur indispensable pour élaborer et exploiter les modèles, tant physiques que numériques, aux limites de leurs possibilités.

Ces deux collègues ont conforté leurs savoirs dans le cadre d'une certaine mobilité géographique, une mobilité qui a enrichi leurs expériences personnelles :

- enseignements dans les universités et en écoles d'ingénieurs,
- séjours de recherche de longue durée aux États-Unis, en Italie,
- production d'ouvrages de recherche, en français et anglais,
- démarches d'enseignement très complètes : enseignements en cours formalisés, travaux dirigés variés, travaux pratiques.

L'ouvrage proposé consacre beaucoup de place à la clarification des concepts, à travers le corps principal du texte certes, mais avec un rôle important dévolu aux exercices, en nombre significatif, développés, avec leurs solutions, sur près de 120 pages.

Les situations abordées sont les plus classiques pour les premières, mais relèvent aussi, pour les suivantes, de problématiques plus complexes, dans certains aspects rhéologiques par exemple. Le niveau général de cet ouvrage, très complet pour les étudiants de licence et de master auxquels il s'adresse principalement, est un excellent moyen d'accès à des ouvrages de mécanique, de cours ou de problèmes, plus difficiles, proposés aux étudiants plus avancés par le même éditeur.

Comme je l'ai parfois déjà indiqué dans des introductions concernant ces auteurs, je ne doute absolument pas que cette première édition constituera pour bien des étudiants un outil tout à fait efficace pour la compréhension de nombreux aspects de la mécanique des fluides.

Michel Combarnous

Professeur émérite à l'université de Bordeaux 1
Membre correspondant de l'Académie des Sciences
Membre fondateur de l'Académie des Technologies

AVANT-PROPOS

Ce livre a été écrit comme un premier cours en mécanique des fluides pour des étudiants de niveau licence et master. D'après notre expérience en tant qu'enseignants depuis de nombreuses années, nous avons remarqué que la mécanique des fluides est une des disciplines les plus difficiles à assimiler. Elle fait appel aussi bien à des connaissances théoriques mathématiques (calcul tensoriel, opérateurs de divergence et de gradient, théorème de Green ou notion de potentiel complexe…) qu'à des bases de la physique (force d'Archimède, équation de Bernoulli, pertes de charge, aérodynamique ou notion de similitude…).

Les auteurs ont structuré ce livre en onze chapitres. Le premier traite des notions fondamentales sur les propriétés en mécanique des fluides telles que la contrainte, la viscosité, la compressibilité qui, elle, fait appel aux bases de la thermodynamique et enfin la notion de la tension de surface. Le deuxième chapitre est consacré au Principe fondamental de la statique, ainsi qu'à la force d'Archimède. Le troisième chapitre, qui est de plus en plus occulté dans les universités, aborde la cinématique des fluides. Il traite particulièrement les écoulements plans 2D dans les cas incompressible et irrotationnel. Le cas de la fonction potentiel complexe est essentiel dans la facilité de résolution de nombreux problèmes dans les chapitres ultérieurs. Le chapitre 4 aborde la dynamique des fluides dans le cas des fluides non visqueux (ou parfaits). L'équation de Bernoulli est détaillée sous toutes ses formes par la conservation de la quantité de mouvement, le théorème de l'énergie cinétique ainsi que le 1er principe de la thermodynamique. Le chapitre 5, quant à lui, introduit d'abord le théorème de Reynolds avant de développer les équations de base régissant un écoulement : (i) conservation de la masse, (ii) conservation de la quantité de mouvement et (iii) conservation de l'énergie. De nombreuses applications industrielles actuelles traitent des écoulements de fluides non-newtoniens (polymère, cosmétique, agroalimentaire…). Le chapitre 6 leur est consacré. On fait souvent des tests dans des souffleries avant la conception des produits réels : la notion de similitude paraît essentielle et ceci fait l'objet du chapitre 7. Le chapitre 8 donne une introduction très générale de la turbulence et traite la fermeture du problème des tenseurs de Reynolds (inconnue supplémentaire) tout en abordant la notion de couche limite. Ces notions sont essentielles pour traiter les problèmes de pertes de charge dans un circuit donné et c'est l'objet du chapitre 9. Enfin, les chapitres 10 et 11, un peu plus spécifiques et en connexion avec l'aérodynamique, concernent les problèmes d'écoulements autour d'obstacles (par exemple un profil d'aile) et les écoulements compressibles.

À la fin de chaque chapitre, le lecteur trouvera quelques exercices d'application. Ces exercices ont été choisis de manière à mettre en œuvre l'ensemble des connaissances

du cours sur des configurations pratiques et couramment rencontrées par l'ingénieur. Quelques références bibliographiques sont données à la fin de la partie de cours pour chaque chapitre pour permettre à ceux qui le désirent de rentrer plus avant dans les nombreux concepts théoriques qui essaiment le domaine de la mécanique des fluides.

Avec ce livre, les auteurs espèrent donner un éclairage clair des concepts de base de la mécanique des fluides et de ses applications courantes. Un effort constant de rédaction a été réalisé pour couvrir les points essentiels sans trop rentrer dans les détails mathématiques compliqués. En ce sens, nous avons voulu mettre à disposition des étudiants de licence et de master, ainsi qu'aux élèves de grandes écoles, un ouvrage dédié aux applications pratiques de la mécanique de fluides.

Les auteurs

Nomenclature

Symboles romains	
A	Section (m^2)
$a, \vec{a}$	Accélération ($m \cdot s^{-2}$)
C_p, C_v	Chaleur massique à pression et volume constant ($J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$)
C	Couple ($N \cdot m$)
d	Densité
e	Énergie interne massique (ou spécifique) ($J \cdot kg^{-1}$)
E	Module d'élasticité ou module de Young (Pa)
f	Fonction potentiel complexe
$F, \vec{F}$	Force (N)
$\vec{g}$	Accélération de la pesanteur ($m \cdot s^{-2}$)
h	Enthalpie massique (ou spécifique) ($J \cdot kg^{-1}$)
$k_B = 1{,}381 \times 10^{-23}$	Constante de Boltzmann ($J \cdot K^{-1}$)
m	Masse (kg)
$\vec{M}$	Moment ($N \cdot m$)
$N_A = 6{,}022 \times 10^{23}$	Nombre d'Avogadro (mol^{-1})
P, p	Pression ($N \cdot m^{-2}$ ou Pa)
Q	Énergie sous forme de chaleur (J)
Q_v, Q_m	Débit volume ($m^3 \cdot s^{-1}$) et débit masse ($kg \cdot s^{-1}$)
$r = C_p - C_v$	Constante du gaz parfait ($J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$)
$R = 8{,}314$	Constante universelle des gaz parfaits ($J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$)
s	Entropie massique (ou spécifique) ($J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$)
S	Surface (m^2)
t	Temps (s)
T	Température (K)

Symboles romains	
$\vec{U}, U, u, \vec{u}$	Vitesse ($m \cdot s^{-1}$)
V	Volume (m^3)
v	Volume massique (ou spécifique) ($m^3 \cdot kg^{-1}$)
W	Énergie sous forme de travail (J)
z	Hauteur (m)
Symboles grecs	
β_p	Coefficient de dilatation à pression constante (K^{-1})
$\dot{\alpha}$	Taux d'étirage (s^{-1})
χ_T	Coefficient de compressibilité isotherme (Pa^{-1})
χ_s	Coefficient de compressibilité isentropique (Pa^{-1})
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
ϕ	Fonction potentiel
γ	Poids massique (ou spécifique) ($N \cdot m^{-3}$)
$\dot{\gamma}$	Taux de déformation 1D (s^{-1})
Γ	Circulation
Λ	Coefficient de pertes de charge régulières
μ	Viscosité dynamique (Pa.s)
ν	Viscosité cinématique ($m \cdot s^{-2}$)
ψ	Fonction courant
ρ	Masse volumique ($kg \cdot m^{-3}$)
σ	Tension superficielle ($N \cdot m^{-1}$)
τ	Contrainte de cisaillement ($N \cdot m^{-2}$)
$\vec{\omega}$	Vecteur vitesse de rotation (s^{-1})
ξ	Vitesse complexe
$\vec{\Omega}$	Vecteur tourbillon

Tenseurs	
$\overline{\overline{\delta}}$, δ_{ijk}	Tenseur de permutation
$\overline{\overline{\sigma}}$	Tenseur des contraintes
$\overline{\overline{s}}$	Déviateur des contraintes
$\overline{\overline{\varepsilon}}$	Tenseur des déformations
$\overline{\overline{\dot{\varepsilon}}}$	Tenseur des vitesses de déformation
$\overline{\overline{R}}$	Tenseur des rotations
$\overline{\overline{\dot{R}}}$	Tenseur des vitesses de rotation
Nombres sans dimension[1]	
Ca	Nombre de Cauchy
De	Nombre de Deborah
Eu	Nombre d'Euler
Fr	Nombre de Froude
Kn	Nombre de Knudsen
Ma	Nombre de Mach
Re	Nombre de Reynolds
St	Nombre de Strouhal
We	Nombre de Weber
Wo	Nombre de Womersley
Opérateurs	
$\vec{\nabla}$	Gradient
$\vec{\nabla}.$	Divergence
$\vec{\nabla} \wedge$	Rotationnel
Δ	Laplacien

1. Un nombre sans dimension est généralement désigné par deux lettres, les deux premières du nom de celui qui, souvent le premier, a mis en évidence son intérêt.

1 INTRODUCTION ET CONCEPTS FONDAMENTAUX

PLAN

OBJECTIFS

- ➤ Comprendre la nature d'un fluide
- ➤ Définir les propriétés de base d'un fluide
- ➤ Introduire les différents types d'écoulements de fluide
- ➤ Introduire les concepts de thermodynamique appliqués aux fluides

1.1 INTRODUCTION GÉNÉRALE

La mécanique des fluides est une science de la mécanique appliquée qui concerne le comportement des liquides et des gaz au repos ou en mouvement. Cette branche de la mécanique englobe une variété de problèmes allant de l'étude de l'écoulement sanguin dans des capillaires déformables (vaisseaux sanguins de diamètre de quelques microns) à l'écoulement de pétrole brut dans des conduites de l'ordre du mètre de diamètre avec des longueurs pouvant aller jusqu'à 13 000 km. Les principes de la mécanique des fluides sont nécessaires pour expliquer pourquoi les avions volent et quel est le profil d'aile idéal pour avoir un vol le plus efficace possible en termes de coûts liés au kérosène et de vitesse d'avion alors que les balles de golf à aspérités servent à lancer la balle plus loin grâce au décollement tardif de la couche limite dans le cas d'un écoulement turbulent.

Bien que la structure moléculaire des fluides soit très importante afin de distinguer un fluide d'un autre, il n'est pas possible d'étudier le comportement de chaque molécule lorsqu'on essaie de décrire le comportement des fluides au repos ou en mouvement. On considère plutôt la valeur moyenne ou macroscopique de la quantité pour laquelle la moyenne est évaluée sur un petit volume contenant un grand nombre de molécules. Par exemple, lorsqu'on dit que la vitesse en un point donné vaut telle valeur, nous indiquons en fait une vitesse moyenne des molécules prise dans un petit volume entourant le point donné. Ce volume est en fait très petit comparé aux dimensions physiques du système étudié mais très grand comparé à la distance moyenne entre les molécules. Par exemple pour les gaz aux conditions standards, l'espacement entre les molécules est de l'ordre de 10^{-6} mm et pour les liquides il est de l'ordre de 10^{-7} mm. Par conséquent, le nombre de molécules par millimètre cube est de l'ordre de 10^{18} pour les gaz et 10^{21} pour les liquides. Il est alors clair que le nombre de molécules dans un volume minuscule est très grand et l'idée d'utiliser des valeurs moyennes sur ce petit volume est raisonnable. Nous supposerons donc que toutes les grandeurs du fluide (pression, vitesse…) varient de façon continue dans le fluide, c'est-à-dire que l'on traitera le fluide comme un milieu continu. En revanche, cette hypothèse ne sera plus valide dans le cas des gaz raréfiés que l'on trouve, par exemple, dans les très hautes altitudes. Dans ce cas, l'espacement entre les molécules d'air peut devenir très grand et le concept de milieu continu ne peut plus être valable.

1.2 Définition d'une contrainte

Lorsque des solides sont soumis à des contraintes, ils vont initialement se déformer (déformation infinitésimale) mais pas de façon continue comme dans un écoulement. D'autres matériaux comme par exemple de la boue, du goudron, du mastic ou du dentifrice… ne sont pas facilement classifiables puisqu'ils se comportent comme des solides lorsque la contrainte appliquée est petite mais si cette contrainte dépasse une valeur critique, ils s'écoulent comme un fluide. L'étude de telles substances est une science à part appelée rhéologie (voir chapitre 6) et fait partie de la mécanique des fluides dite des fluides complexes.

Tous les fluides au repos peuvent être classés suivant leur réponse à cette *contrainte tangentielle*. Soit une surface élémentaire δA où s'exerce la force $\delta\vec{F}$ agissant sur cette surface et qui peut être décomposée en une force normale $\delta\vec{F}_n$ et une force tangentielle $\delta\vec{F}_t$ (voir Figure 1.1).

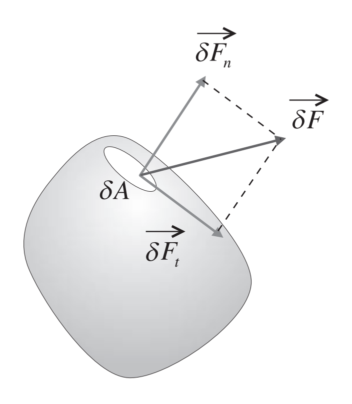


Figure 1.1 – Définition d'une contrainte appliquée sur une surface de volume fluide.

La force par unité de surface est appelée *contrainte*. La contrainte tangentielle est aussi appelée *contrainte de cisaillement*. Les composantes de cette contrainte sont définies comme :

- la contrainte normale :

$$\sigma = \lim_{\delta A \to 0} \left(\frac{\delta F_n}{\delta A} \right) \tag{1.1}$$

- la contrainte de cisaillement :

$$\tau = \lim_{\delta A \to 0} \left(\frac{\delta F_t}{\delta A} \right) \tag{1.2}$$

Un fluide est défini comme une substance qui se déforme continuellement sous l'action d'une quelconque contrainte de cisaillement (force par unité de surface) qui peut être créée dès lors qu'une force tangentielle agit sur une surface quelle que soit l'amplitude de cette contrainte. Si on considère deux plaques planes séparées d'une petite distance donnée (voir Figure 1.2), l'une étant stationnaire et l'autre se déplaçant grâce à une contrainte appliquée sur cette dernière, la contrainte tangentielle dans le fluide situé entre les plaques dépend de sa *vitesse de déformation* et s'annule lorsque la vitesse est nulle.

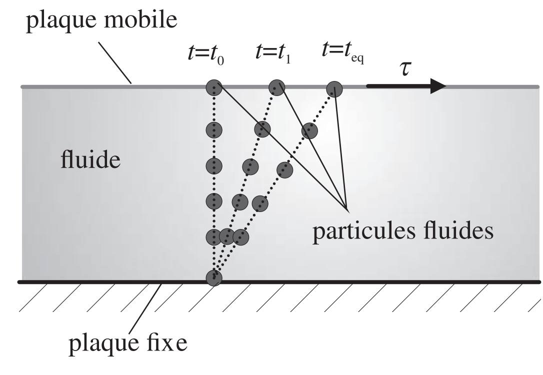


Figure 1.2 – Vue qualitative de la déformation d'un fluide après application d'une contrainte à la paroi supérieure.

1.3 Définition d'un fluide

Une question que l'on se pose souvent : quelle est la différence entre un solide et un fluide ? Nous avons en général une idée vague de cette différence. Un solide est « dur » et pas facile à déformer, tandis qu'un fluide est une matière molle et qui peut être facilement déformée (on peut très simplement bouger dans l'air). Mais ces explications des différences entre un solide et un fluide ne sont pas satisfaisantes d'un point de vue scientifique. Si l'on regarde ces matières d'un point de vue moléculaire (voir Figure 1.3), on s'aperçoit que le solide (acier, béton…) a des molécules rapprochées de façon très dense avec des *forces de cohésion* intermoléculaires très grandes et qui permettent au solide de maintenir sa forme initiale. En revanche, pour des liquides (eau, huile…), les molécules sont plus espacées, les forces intermoléculaires sont plus faibles que dans le cas des solides

et les molécules ont la liberté de mouvement. Par conséquent, les liquides peuvent être facilement déformés (sans avoir la possibilité d'être très fortement comprimés comme pour les gaz) mais peuvent, par exemple, être versés dans des récipients ou s'écouler dans un tube. Les gaz (air, oxygène…) ont un espace entre les molécules encore plus grand et ont des forces intermoléculaires de cohésion extrêmement petites et par conséquent ils sont très facilement déformables et compressibles (ils peuvent remplir complètement le volume d'un récipient quelconque dans lequel ils sont placés).

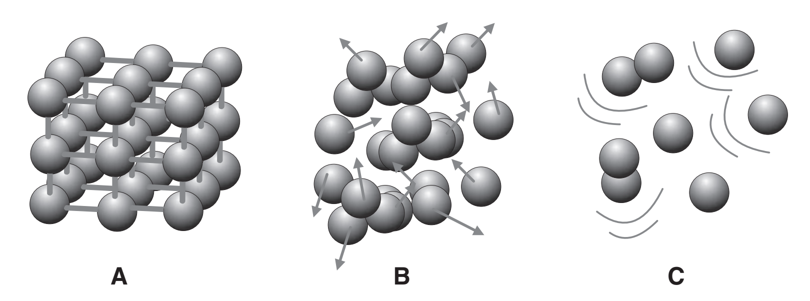


Figure 1.3 – **Structures moléculaires. A : solide, B : liquide, C : gaz.**

Les principales différences entre un solide et un liquide peuvent être résumées dans le Tabelau 1.1

Tableau 1.1 – **Différences entre un solide et un liquide.**

SOLIDE	LIQUIDE
→ Structure compacte (voir Figure 1.3)	→ Structure moins compacte (voir Figure 1.3)
Forces attractives entre molécules plus grandes → Molécules plus serrées $\tau = F/A \sim \alpha$ α α	Pas de résistance → déformation
SOLIDE	**LIQUIDE**
→ α ~ contrainte tangentielle jusqu'à une certaine limite sinon il y a rupture du matériau	→ pas de déformation fixe mais déformation continue tant que la contrainte visqueuse est appliquée
→ peut revenir à sa forme initiale lorsque la contrainte est éliminée	→ ne peut jamais revenir à sa forme initiale

1.4 Concept de continuum

Bien que la matière soit composée de plusieurs molécules comme on vient de le voir précédemment, le concept d'un continuum suppose une distribution continue de la masse du système sans espace vide. Pour savoir si un milieu est continu ou pas, on calcule le nombre de *Knudsen* sans dimension, défini par :

$$Kn = \frac{\lambda}{L} \tag{1.3}$$

Où λ est une longueur correspondant au *libre parcours moyen* ou encore la distance moyenne d'un point de vue statistique entre deux collisions successives des molécules et L est la longueur caractéristique de la géométrie de l'écoulement étudié. L'ordre de grandeur du libre parcours moyen est de quelques centaines de nanomètres (voir Tableau 1.2 dans le cas de l'hydrogène et de l'hélium).

Tableau 1.2 – Ordres de grandeur du diamètre moyen des molécules (d) et du libre parcours moyen (λ) pour l'hydrogène et l'hélium.

	d (nm)	λ (nm)
H_2	0,218	176
He	0,2	209

En physique statistique, le libre parcours moyen est défini comme :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\ \pi\ N\ d^2} \tag{1.4}$$

où d est le diamètre moyen des molécules et N est le nombre de molécules. À partir de la valeur du nombre de Knudsen, il a été établi que :

- Lorsque $Kn \leqslant 10^{-2}$ (le libre parcours moyen est très petit devant la longueur caractéristique) alors le modèle peut être considéré comme continu. Toutes les équations écrites tout au long de ces chapitres du livre se trouveront dans ce cas et seront donc valides.
- Lorsque $10^{-2} < Kn \leqslant 0{,}1$, alors l'écoulement se fait avec glissement sur les parois. Un exemple concret concerne les problèmes liés à la microfluidique : l'ordre de grandeur de l'échelle caractéristique est d'une dizaine de micromètres, et par conséquent $Kn \approx 0{,}02$.
- Lorsque $0{,}1 < Kn \leqslant 10$, on se trouve dans la zone de transition entre le cas précédent et le cas suivant.
- Lorsque $Kn > 10$, le milieu n'est plus continu, le libre parcours moyen est du même ordre de grandeur que l'échelle caractéristique. Tout se passe donc à l'échelle moléculaire. La modélisation se fait par la méthode dite de *dynamique moléculaire*.

1.5 Propriétés des fluides

Masse volumique, volume spécifique et poids spécifique

La masse volumique est définie comme la masse par unité de volume :

$$\rho = \lim_{\delta V \to 0} \frac{\delta m}{\delta V} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}[\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}] \tag{1.5}$$

La masse volumique d'un gaz change avec la pression mais celle d'un liquide peut être considérée comme constante en général. Par exemple, la masse volumique de l'eau à 4 °C et 1 atm (101 325 Pa, pression dans les conditions standard) est d'environ 1 000 $\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ alors celle de l'air dans les conditions standard est d'environ 1,2 $\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

La *densité d* est sans dimension et est définie comme la masse volumique du fluide étudié rapportée à la masse volumique de l'eau : $d = \rho/\rho_e$. L'inverse de la masse volumique par unité de masse est appelé *volume spécifique* (ou *volume massique*) et est défini par : $v = 1/\rho\ [\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1}]$. Les valeurs de la masse volumique de l'eau et de l'air en fonction de la température et dans les conditions standards de pression sont données dans le Tableau 1.3.

Tableau 1.3 – Masse volumique de l'eau et de l'air à la pression atmosphérique.

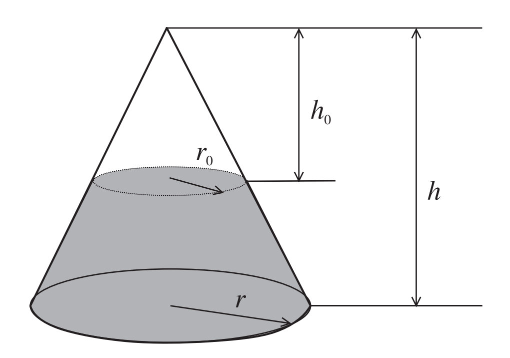
Température (°C)		0	10	15	20	40	60	80	100
$\rho(\mathrm{kg \cdot m^{-3}})$	Eau	999,8	999,7	999,1	998,2	992,2	983,2	971,8	958,4
	Air	1,293	1,247	1,226	1,205	1,128	1,060	1,000	0,9464

Le *poids spécifique* est défini comme le produit de la masse volumique par l'accélération de la pesanteur :

$$\gamma = \rho g [\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-3}] \tag{1.6}$$

Exercice : masse volumique du liquide dans un réservoir de forme conique.

Trouver la hauteur de la surface libre si 0,02 m^3 d'eau sont remplies dans un réservoir de forme conique (voir la figure ci-contre) de hauteur h = 0,5 m et de rayon à la base de r = 0,25 m. Combien de quantité d'eau supplémentaire est nécessaire pour remplir entièrement le réservoir ? Si ce réservoir contient 30,5 kg d'huile, quelle est la masse volumique de cette huile ?



Solution.
$$V_{\text{cône}} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{0,25^2 \times 0,5}{3} = 0,0327 \text{ m}^3$$

Donc le volume d'eau que l'on peut rajouter pour remplir entièrement le réservoir est (0,0327-0,02) = 0,0127 m^3. À partir de la figure, on a : $r_0/0,25 = h_0/0,5$, donc $r_0 = h_0/2$. Par conséquent,

$$V_{\text{vide-haut cône}} = \pi \frac{\left(\frac{h_0}{2}\right)^2 h_0}{3} = 0,0127 \text{ m}^3$$

D'où $h_0 = 0,364$ m. La surface libre serait à (0,5-0,364) = 0,136 m de la base du cône. La masse volumique correspondant à 30,5 kg d'huile est :

$$\rho_{\text{huile}} = \frac{m_{\text{huile}}}{V_{\text{cône}}} = \frac{30,5}{0,0327} = 932,7 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

1.6 Viscosité

1.6.1 L'expérience et la loi phénoménologique de Newton

En 1687, Newton réalise une expérience simple démontrant l'influence de la viscosité des fluides sur sa mise en écoulement. L'expérience consiste à cisailler un matériau à l'état pâteux, fondu ou bien encore liquide entre deux plaques dont l'une est fixe et l'autre est animée d'un mouvement de translation à vitesse $\overline{\mathrm{U}}$ sous l'action d'une force $\overline{\mathrm{F}}$ (voir la Figure 1.4). Lorsque $Uh/\nu < 1\,500$ ($\nu = \mu/\rho$ est la viscosité cinématique et μ est la viscosité dynamique qui sera définie un peu plus loin dans cette section) alors on assiste à un écoulement dit laminaire et une distribution de vitesse linéaire est obtenue, en régime permanent, entre la plaque fixe et la plaque mobile. En fait le rapport Uh/ν est appelé nombre de Reynolds (voir chapitre 7 pour plus de détails). Un tel écoulement parallèle avec un gradient de vitesse uniforme est appelé écoulement de Couette.

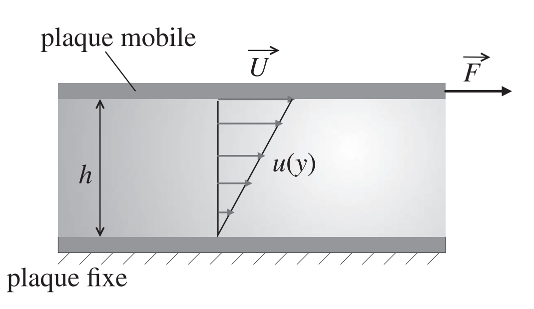


Figure 1.4 – Représentation 2D de l'expérience de Newton.

La force $\vec{F}$ induit une contrainte de cisaillement qui est égale à : $\tau = F/A$, où A est la surface de la plaque. La *loi de Newton* peut alors s'écrire comme :

$$\tau = \mu\, \dot{\gamma} \tag{1.7}$$

où $\dot{\gamma} = \mathrm{d}u/\mathrm{d}y$ est le *taux de cisaillement* (ou vitesse de cisaillement) et μ est la *viscosité dynamique* qui dépend en général de la pression et de la température (par exemple les polymères à l'état fondu). La relation (1.7) est appelée la *loi de viscosité de Newton* (la contrainte visqueuse est proportionnelle au taux de cisaillement).

L'unité SI de la viscosité est [Pa.s] et $\mathrm{g \cdot cm^{-1} \cdot s^{-1}}$ en unités CGS (Centimètre-Gramme-Seconde) ; 1 $\mathrm{g \cdot cm^{-1} \cdot s^{-1}}$ équivaut à 1P (Poise) ou 1/10e de Poiseuille [Pl] (1 Pl = 10 P). Cette dernière appellation provient de la *loi de Poiseuille* (voir exercice 4 du Chapitre 5) et qui est utilisée pour déterminer la viscosité d'un fluide. L'unité SI de la *viscosité cinématique* ν est $\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$ et dans le système d'unités CGS, 1 $\mathrm{cm^2 \cdot s^{-1}}$ équivaut à 1 St (Stokes, 1 St = $10^{-4}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$). Cette dernière unité provient de l'équation de Stokes pour la mesure de la viscosité (voir Chapitre 9).

Le Tableau 1.4 donne quelques valeurs de viscosité pour différents matériaux.

Tableau 1.4 – Valeurs de viscosité cinématique et dynamique pour quelques fluides à pression atmosphérique.

fluide	μ (Pl)	ν (m²/s)
air (0 °C)	$1{,}7 \times 10^{-5}$	$1{,}33 \times 10^{-5}$
eau (20 °C)	$1{,}8 \times 10^{-3}$	$1{,}79 \times 10^{-6}$
mercure (20 °C)	$1{,}6 \times 10^{-3}$	$1{,}2 \times 10^{-7}$
Huiles	10^{-2} à 1	10^{-5} à 10^{-3}
polymères fondus – verre fondu	10^{2} à 10^{4}	10^{-1} à 10

Remarque :

Lorsque le fluide est parfait (fluide idéal, non visqueux) alors $\mu = 0$. Par exemple, si on considère l'écoulement sur une plaque plane (voir Figure 1.5), la région loin de la paroi peut être considérée comme non-visqueuse car les effets visqueux ne se font plus ressentir loin de cette paroi.

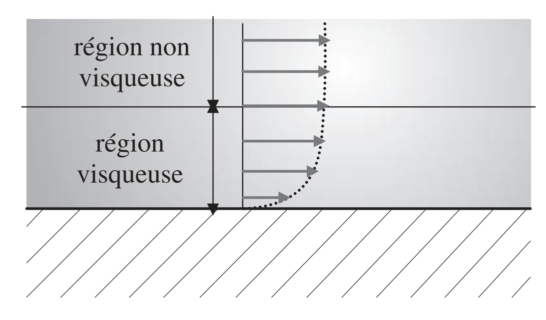


Figure 1.5 – Région visqueuse versus région non-visqueuse.

Expérience de Trouton

Considérons une éprouvette de longueur l et de section S soumise à un effort de traction F dans la direction x à vitesse d'élongation u constante. Le taux d'élongation est $\dot{\alpha} = u/l = (\mathrm{d}l/\mathrm{d}t)/l$ et la contrainte de traction est $\sigma = F/S$. Trouton définit la viscosité élongationnelle comme : $\mu_e = \sigma/\dot{\alpha}$. Or, en appliquant cette définition sur les matériaux bitumeux, on trouve que $\mu_e = 3\mu$. Ce résultat est physiquement inacceptable étant donné que la viscosité d'un matériau est une caractéristique intrinsèque qui ne peut donc pas dépendre du type de déformation exercé. Comme nous le verrons au chapitre 5, l'explication va être donnée par la loi de comportement du matériau non plus en écoulement unidimensionnel mais dans le cas général d'un écoulement tridimensionnel.

1.6.2 Variation de la viscosité en fonction de la température

Dans le cas des gaz, une augmentation de la température entraîne un mouvement plus intense des molécules et accroît le mélange moléculaire et donc la viscosité augmente. Dans le cas d'un liquide, lorsque la température augmente les molécules se séparent entre elles, décroissant l'attraction entre elles et donc la viscosité diminue. La relation entre la température et la viscosité est par conséquent inversée pour un gaz et un liquide. La Figure 1.6 montre la variation de la viscosité avec la température pour l'air et l'eau.

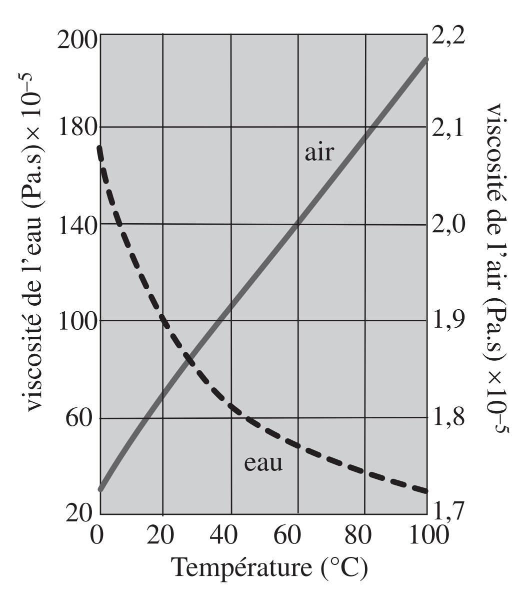


Figure 1.6 – **Variation de la viscosité en fonction de la température.**

Loi de Sutherland

Concernant les gaz, il est courant d'utiliser la loi de Sutherland définie de la façon suivante :

$$\frac{\mu(T)}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \frac{T_0 + S}{T + S}$$

$\mu_0 = \mu(T_0)$ est la viscosité à la température T_0, S est la température de *Sutherland*. Pour l'air par exemple : $\mu_0 = 1{,}711 \cdot 10^{-5}$ Pa.s, $T_0 = 273{,}15$ K et S = 110,4 K, ce qui donne une bonne approximation sur une plage de température entre 170 K et 1 900 K.

Exercice : contrainte dans une huile

On suppose que de l'huile ayant une viscosité $\mu = 0{,}29$ Pa.s s'écoule entre les deux plaques dont l'une est soumise à la force $\vec{F}$ (voir figure 1.4). Calculer la contrainte visqueuse τ dans l'huile si la vitesse de la plaque supérieure est de $U = 3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et que la distance entre plaque est de $h = 2$ cm.

Solution. L'accélération est nulle et en supposant qu'il n'y a pas de variation de pression dans la direction de l'écoulement, on peut montrer (par un équilibre de force sur un élément de fluide) que la contrainte de cisaillement τ est constante à travers tout le fluide. Par conséquent, par intégration on obtient : $u = U\, y/h$ et à partir de l'équation (1.7), on peut donc calculer :

$$\tau = \mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \mu \frac{U}{h} = \frac{0{,}29 \times 3}{0{,}02} = 43\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} = 43\ \text{N} \cdot \text{m}^{-2} = 43\ \text{Pa}$$

Bien que l'huile est supposée être très visqueuse, la contrainte visqueuse est modeste, environ 2 356 fois moins que la pression atmosphérique. Les contraintes visqueuses dans les liquides moins visqueux et les gaz seront donc encore plus petites.

Exercice : mesure de la viscosité

Un cylindre de rayon $r_{int} = 0{,}12$ m tourne dans un autre cylindre de rayon $r_{ext} = 0{,}13$ m qui lui est fixe. Les deux cylindres sont coaxiaux et de longueur $L = 0{,}3$ m. Déterminer la viscosité du liquide remplissant l'espace entre les cylindres si un couple de 0,88 N·m est requis pour maintenir une vitesse angulaire de $\omega = 2\pi$ rad·s^{-1}.

Solution. Le couple s'écrit de la façon suivante :

$$C = \underbrace{\tau\ S}_{\text{force}} r = \tau\ (2\pi r\ L)\ r \Rightarrow \tau = \frac{0{,}467}{r^2}$$

Or $\tau = \mu \dfrac{du}{dy}$ et ici $dy = -dr$ (car lorsque $r \searrow$, $u \nearrow$)

En intégrant, on obtient donc :

$$\int_{u_{ext}}^{u_{int}} (du) = \frac{0,467}{\mu} \int_{r_{ext}}^{r_{int}} \left(-\frac{dr}{r^2}\right) \Rightarrow u_{int} - u_{ext} = \frac{0,467}{\mu}\left[\frac{1}{r}\right]_{0,13}^{0,12}$$

Or $\qquad u_{int} = \omega\, r_{int} = 2\pi \times 0,12 = 0,754\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $u_{ext} = 0$.

D'où : $\qquad \mu = \dfrac{0,467}{0,754}\left[\dfrac{1}{0,12} - \dfrac{1}{0,13}\right] = 0,397$ Pa.s.

1.6.3 Fluide non-newtonien

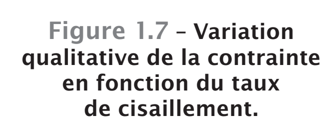
Le fluide est *non-newtonien* lorsque la viscosité varie avec le taux de déformation (ou taux de cisaillement). La Figure 1.7 montre en échelle linéaire des relations typiques, entre contrainte de cisaillement τ et taux de cisaillement $\dot{\gamma}$, observées pour différents types de fluides non newtoniens. Le modèle en *loi de puissance* (ou modèle d'*Ostwald*) représente assez correctement les fluides non-newtoniens (voir chapitre 6 pour plus de détails). Elle est donnée par :

$$\tau = \mu^{app} \frac{du}{dy} \tag{1.8}$$

où :

$$\mu^{app} = K\left|\frac{du}{dy}\right|^{m-1}$$

μ^{app} représente la *viscosité apparente* ou effective du fluide non-newtonien considéré et K est une constante donnée qui dépend du fluide étudié et m l'index du fluide.



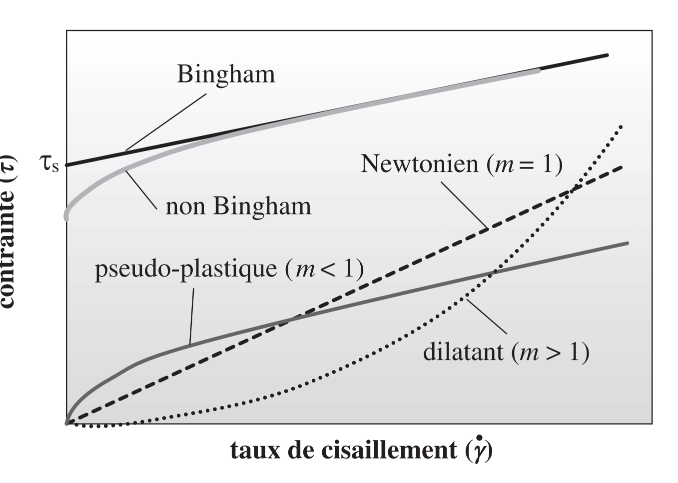


Figure 1.7 – Variation qualitative de la contrainte en fonction du taux de cisaillement.

Fluides thixotropes

Les fluides *thixotropes* ont une viscosité qui diminue avec le temps quand on leur applique une contrainte constante à condition que le phénomène soit réversible. Après suppression de cette contrainte, on ne retrouve la viscosité initiale qu'après un certain temps. Les solutions concentrées de polymères et les suspensions en sont des exemples. De nombreux corps sont à la fois thixotropes, rhéo-fluidifiants et à seuil. La relation entre thixotropie et propriétés rhéo-fluidifiantes dépend du rapport entre les temps caractéristiques de réarrangement de la structure interne du fluide (temps τ) et de variation de la contrainte appliquée (temps T). Le rapport τ/T est appelé nombre de *Deborah De*. Lorsque $De < 1$, le fluide a le temps de se réarranger lorsqu'on fait varier la contrainte. Pour un fluide rhéo-fluidifiant, la viscosité apparente diminue avec *De* mais la valeur obtenue est indépendante de la durée de la mesure T. Si on enchaîne des charges (augmentation de la vitesse ou de la contrainte) et des décharges (diminution), la relation $\tau = f\,(De)$ est toujours la même. Pour $De >> 1$, les propriétés rhéologiques évoluent au cours du temps au fur et à mesure du changement de structure du fluide. Lorsqu'on décrit une suite de charges et de décharges, on observe un effet d'hystérésis caractéristique de la thixotropie. Les fluides thixotropes ont de nombreuses applications pratiques comme les peintures et les boues. La viscoélasticité correspond à un comportement intermédiaire entre celui d'un solide et celui d'un liquide. Un exemple est fourni par les boules de certaines pâtes silicone qui rebondissent élastiquement sur le sol comme des solides mais s'étalent comme des liquides lorsqu'elles sont posées suffisamment longtemps sur un plan.

Lorsque $m < 1$, les fluides sont qualifiés de *rhéo-fluidifiants* (ou *pseudo-plastiques*). Ils s'écoulent même sous une contrainte faible mais ils ont une viscosité apparente qui diminue lorsque la contrainte croît. De nombreuses solutions de polymères présentent ce type de comportement qui peut être attribué à des macromolécules entremêlées qui se séparent progressivement et s'alignent avec l'écoulement. Dans d'autres cas, cela provient de la disparition des structures qui sont formées par suite de l'attraction entre particules solides. On peut citer également le sang, le shampooing, les concentrés de jus de fruits, les encres d'imprimerie, la mayonnaise, le yoghourt, les huiles végétales… Pour des fluides à seuil (plastiques) appelés aussi *fluides de Bingham*, il n'y a pas d'écoulement tant que la contrainte appliquée ne dépasse pas une valeur seuil τ_s :

$$\tau = \tau_s + \mu_P\,\dot{\gamma} \tag{1.9}$$

où μ_P représente la *viscosité plastique*. Leur viscosité diminue ensuite si une contrainte supérieure au seuil est appliquée. On peut citer de nombreuses suspensions concentrées de solides dans un liquide et certaines solutions de polymères mais aussi le ciment frais, les pâtes dentifrices ou le concentré de tomate. On introduit souvent la notion de « fluide de *Bingham* » qui suppose en théorie une variation linéaire de la déformation avec la contrainte au-delà du seuil. La loi réelle est plus proche en fait d'une loi de puissance. Ce comportement est dû à la destruction des structures tridimensionnelles internes du fluide qui se forment au repos. Par exemple, certaines argiles ont une structure microscopique

en plaquettes. En l'absence d'écoulement, les plaquettes forment des agrégats rigides, qui résistent jusqu'à un certain seuil de contrainte. Au-dessus de ce seuil, la structure est en partie détruite, et l'écoulement est rendu possible : plus la vitesse augmente, plus la structure se détruit, tandis que les plaquettes s'alignent avec l'écoulement. Il en résulte une augmentation de la contrainte avec la déformation plus lente que celle que donnerait une relation linéaire. On parle de fluides à seuil rhéo-fluidifiants dits « *fluides de Casson* ». Les boues de forage rentrent dans cette catégorie.

Lorsque $m > 1$, les fluides sont *rhéo-épaississants* (ou *dilatants*). La viscosité augmente avec la contrainte appliquée. Le sable mouillé en est un exemple : à faible vitesse, les grains glissent les uns par rapport aux autres en étant lubrifiés par l'eau. Sous une forte contrainte, ils viennent frotter les uns contre les autres. Un autre exemple typique est le mélange d'eau et d'amidon de maïs. Il s'écoule comme un fluide lorsque la pâte est posée sur une table et il se comporte comme un solide lorsque la contrainte augmente.

1.7 Relations thermodynamiques des gaz parfaits

1.7.1 Gaz parfait

Tant que la pression n'est pas trop importante, les calculs d'écoulement compressible peuvent être effectués en supposant que le fluide étudié est un gaz parfait. Par définition, un *gaz parfait* est un gaz dans lequel les forces intermoléculaires sont négligeables. L'équation d'un gaz parfait peut être déduite de la théorie cinétique et s'écrit :

$$PV = mrT \tag{1.10}$$

où P est la pression ($\mathrm{N \cdot m^{-2}}$), V est le volume du système ($\mathrm{m^3}$), m est la masse du système (kg), r est la constante du gaz parfait étudié ($\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$) et T la température (K). Cette équation peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$P = \rho r T \tag{1.11}$$

où $\rho = m/V$ est la masse volumique du gaz.

Une autre forme connue sous le nom d'équation des gaz parfaits est :

$$PV = nRT \tag{1.12}$$

où n est le nombre de moles et R est la constante universelle des gaz parfaits $R = k_B N_A = 8{,}314\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$ où $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$ est la constante de *Boltzmann* et $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$ est la constante d'*Avogadro*). On peut aussi écrire que $r = R/M$, où M est la masse molaire du gaz considéré. Par exemple, pour l'air dans les conditions standards, $r = 287\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$. Une mole d'une substance donnée contient une masse égale au poids moléculaire du gaz. Par exemple, dans le cas de l'oxygène, 1 kilogramme-mole (ou kg · mol) a une masse de 32 kg. Une mole de différents gaz contient toujours le même nombre de molécules dû au fait que les masses des différentes molécules sont dans un même rapport que leurs poids moléculaires, c'est-à-dire qu'un kg-mol contient

$6{,}02 \cdot 10^{26}$ molécules indépendamment des espèces contenues dans le gaz. Si on divise l'équation (1.12) par la masse du système, on obtient alors :

$$Pv = \eta RT \tag{1.13}$$

où η correspond au rapport mole-masse. En divisant (1.13) par le volume :

$$P = CRT \tag{1.14}$$

où C est la concentration ($\text{kg-mol} \cdot \text{m}^{-3}$). On peut réécrire la relation (1.14) sous la forme suivante :

$$P = (N_A C)\frac{R}{N_A}T \tag{1.15}$$

où $\bar{n} = N_A C$ est la densité de la particule (nombre de particules par unité de volume). Finalement l'équation (1.15) peut s'écrire :

$$P = \bar{n} k_B T \tag{1.16}$$

Une question reste cependant posée : jusqu'à quelle limite la théorie des gaz parfaits peut être appliquée ? Le rapport $P/\rho rT$ a été expérimentalement déterminé pour des faibles pressions (1 atm ou en dessous) et des températures de 273 K et au-dessus dans la plupart des cas de gaz purs. Ces mesures ont montré que ce rapport était différent de l'unité à moins de 1 %. Cependant, dans le cas de systèmes à basse température et haute pression, les molécules sont très denses et on doit utiliser des modèles d'équations réelles de gaz. En réalité la loi des gaz parfaits ignore le fait que les molécules possèdent un volume propre ; le volume d'un gaz réel est donc supérieur au volume d'un gaz idéal. En outre, les interactions autres que les simples chocs élastiques du modèle des gaz parfaits existent entre les molécules. Les forces attractives entre les molécules font que la pression d'un gaz réel est inférieure à la pression d'un gaz idéal, en particulier pour les hautes pressions. L'équation de van der Waals s'obtient, contrairement à celle des gaz parfaits, à partir d'un modèle de gaz composé de sphères soumises à des interactions dipolaires attractives appelées forces de van der Waals. Elle s'écrit :

$$(P + a\rho^2)\left(\frac{1}{\rho} - b\right) = rT \tag{1.17}$$

où a et b sont des constantes qui dépendent du type de gaz (a correspond à la pression de cohésion et b correspond au covolume).

En conclusion, l'équation des gaz parfaits peut être utilisée pour de nombreuses applications relatives aux écoulements compressibles.

1.7.2 Énergie interne et enthalpie

D'un point de vue microscopique, un gaz est composé d'un ensemble de particules en mouvement aléatoire. L'énergie d'une particule consiste en une énergie de translation, une énergie de rotation, une énergie de vibration ainsi qu'une énergie électrique. Toutes ces énergies additionnées sur l'ensemble des particules du gaz forment l'énergie interne, E, du gaz. Considérons un gaz en équilibre, c'est-à-dire sans gradients de vitesse, pression, température et concentration d'espèces. Soit e l'énergie interne par unité de masse.

L'*enthalpie* massique h est définie par $h = e + P\,v$ et on sait que $e = e(T,v)$ et $h = h(T,P)$. Si le gaz est chimiquement inerte et les forces intermoléculaires sont négligeables, le gaz est parfait et l'énergie interne et l'enthalpie ne sont fonction que de la température ($e = e(T)$, $h = h(T)$). On peut montrer que :

$$\begin{cases} \mathrm{d}e = C_v \;\mathrm{d}T \\ \mathrm{d}h = C_p \;\mathrm{d}T \end{cases} \tag{1.18}$$

Dans le cas où les *chaleurs massiques* à volume constant (C_v) et à pression constante (C_p) sont constantes, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas de la température, alors :

$$\begin{cases} e = C_v \; T \\ h = C_p \; T \end{cases} \tag{1.19}$$

D'après la relation de *Mayer* et en considérant que le gaz est parfait (dans la plupart des applications d'écoulement compressible), on peut écrire que :

$$C_p - C_v = r \tag{1.20}$$

Sachant que $C_p / C_v = \gamma$ et en utilisant la relation (1.20), on obtient les expressions de C_p et C_v suivantes :

$$\begin{cases} C_p = \dfrac{\gamma\, r}{\gamma - 1} \\ C_v = \dfrac{r}{\gamma - 1} \end{cases} \tag{1.21}$$

1.7.3 Premier principe de la Thermodynamique

On considère un système à masse constante. Si une quantité de chaleur δq est ajoutée au système à travers la frontière de ce système et si δw est le travail effectué sur le système par l'environnement extérieur alors la variation d'énergie interne peut s'écrire (en supposant que le système est sans variation d'énergie cinétique et potentielle) :

$$\mathrm{d}e = \delta q + \delta w \tag{1.22}$$

La relation ci-dessous correspond au *1er principe* de la thermodynamique.

Remarque :

Ici, de est la différentielle exacte et sa valeur dépend seulement des états initial et final du système. En revanche, δq et δw dépendent des différents états successifs d'échange de chaleur et de travail à travers les limites du système.

Une transformation isentropique est une combinaison d'une transformation adiabatique (pas de chaleur ajoutée ou enlevée du système) et d'un processus réversible (se déroulant à travers des états successifs, chaque état correspondant à des gradients infinitésimaux). Dans une transformation isentropique, l'entropie du système est constante.

1.7.4 Entropie et second principe de la Thermodynamique

L'équation (1.22) ne nous dit rien sur la direction des échanges (c'est-à-dire un corps chaud par rapport à son environnement va-t-il chauffer ou refroidir ?). Pour répondre à cette question, on définit une nouvelle variable d'état, l'*entropie* massique par :

$$\mathrm{d}s = \frac{\delta q_{rev}}{T} \tag{1.23}$$

où s est l'entropie massique du système, δq_{rev} est la quantité de chaleur ajoutée de façon réversible au système et T est la température du système. L'entropie est une variable d'état et peut être définie avec tout type de processus, *réversible* ou irréversible. Pour une transformation *irréversible*, on écrit :

$$\mathrm{d}s = \frac{\delta q}{T} + \mathrm{d}s_{irrev} \tag{1.24}$$

Le changement d'entropie durant une transformation est égal à la chaleur ajoutée au système divisée par la température plus une contribution des phénomènes dissipatifs d'ordre irréversible. Les phénomènes dissipatifs accroissent toujours l'entropie, c'est-à-dire que :

$$\mathrm{d}s_{irrev} > 0 \tag{1.25}$$

Une combinaison des relations (1.24) et (1.25) donne la relation suivante :

$$\mathrm{d}s \geqslant \frac{\delta q}{T} \tag{1.26}$$

Si la transformation est adiabatique alors $\delta q = 0$ et $\mathrm{d}s \geqslant 0$. Le second principe nous dit dans quelle direction une transformation aura lieu. La direction d'un processus est telle que le changement d'entropie du système avec l'environnement doit être toujours positive ou nulle pour une transformation réversible.

L'accroissement d'énergie sous forme de travail est $\delta w = -P\,\mathrm{d}v$ et d'après le 1er principe :

$$\mathrm{d}e = \delta q - P\,\mathrm{d}v \tag{1.27}$$

De plus, si la transformation est réversible alors :

$$T\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}e + P\,\mathrm{d}v \tag{1.28}$$

Par définition, l'enthalpie s'écrit : $h = e + P\,v$. Donc :

$$\mathrm{d}h = \mathrm{d}e + P\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}P \tag{1.29}$$

En combinant les relations (1.28) et (1.29), on obtient la relation suivante :

$$T\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}h - v\,\mathrm{d}P \tag{1.30}$$

Pour un gaz parfait $\mathrm{d}h = C_p\ \mathrm{d}T$, et nous pouvons substituer cette relation dans l'équation (1.30) pour obtenir :

$$\mathrm{d}s = C_p\,\frac{\mathrm{d}T}{T} - v\,\frac{\mathrm{d}P}{T} \tag{1.31}$$

En utilisant l'équation des gaz parfaits, on a alors :

$$\mathrm{d}s = C_p \frac{\mathrm{d}T}{T} - r\,\frac{\mathrm{d}P}{P} \qquad (1.32)$$

Soit en intégrant (pour C_p constant) :

$$s_2 - s_1 = C_p \ln\frac{T_2}{T_1} - r\ln\frac{P_2}{P_1} \qquad (1.33)$$

D'une façon similaire, en utilisant la relation (1.28), on obtient :

$$s_2 - s_1 = C_p \ln\frac{T_2}{T_1} + r\ln\frac{v_2}{v_1} \qquad (1.34)$$



Cas isentropique : lorsque la transformation est *isentropique*, elle est réversible et adiabatique ($\delta q = 0$ et $\mathrm{d}s_{irrev} = 0 \Rightarrow \mathrm{d}s = 0$). Les relations (1.33) et (1.21) nous donnent alors :

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \qquad (1.35)$$

De façon similaire, on obtient d'après la relation (1.34) :

$$\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{-1/(\gamma-1)} \qquad (1.36)$$

ou alors :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/(\gamma-1)} \qquad (1.37)$$

Les relations (1.35) à (1.37) sont appelées équations de Laplace.

1.7.5 Compressibilité

a) Coefficient de compressibilité

Le *module d'élasticité* définit la variation de pression en fonction de la variation du volume et est défini par :

$$E = \lim_{\delta V \to 0}\left(-\frac{\delta P}{\delta V/V}\right) \qquad (1.38)$$

où V est le volume et P la pression. Le signe (-) vient du fait que lorsque la pression augmente, le volume diminue. La conservation de la masse indique que :

$$\mathrm{d}m = 0 \Rightarrow \mathrm{d}(\rho V) = 0 \Rightarrow \frac{\delta V}{V} = -\frac{\delta\rho}{\rho} \qquad (1.39)$$

Donc :

$$E = \lim_{\delta\rho \to 0}\left(\frac{\delta P}{\delta\rho/\rho}\right) = \rho\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho} \qquad (1.40)$$

Pour les liquides, E est généralement très grand (le volume ne varie pas beaucoup avec la pression) et pour les gaz, on définit plutôt la *compressibilité* dont l'expression est la suivante :

$$\chi = \frac{1}{E} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial P} = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P} \tag{1.41}$$

Remarque :

Dans le cas isotherme, l'équation (1.41) devient :

$$\chi_T = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T$$

Pour l'eau dans les conditions normales de température et de pression $E = 2{,}06 \times 10^9$ Pa et pour l'air $E = 1{,}4 \times 10^5$ Pa dans le cas d'une transformation adiabatique (voir plus loin). Par conséquent, dans le cas de l'eau, $\chi = 1 / E = 4{,}85 \times 10^{-10}\,\text{Pa}^{-1}$: si la pression atmosphérique arrivait à augmenter d'une atmosphère alors le volume d'eau diminurait d'environ 0,005 %, ce qui démontre son caractère incompressible.

Exercice :

Un récipient rigide en acier est rempli d'un liquide à 15 atm. Le volume du liquide est de 1,232 litre. A une pression de 30 atm, le volume du liquide est de 1,231 litre. Trouver le module d'élasticité du liquide pour la gamme de pressions données dans le cas isotherme ? Quel est alors le coefficient de compressibilité ?

Solution :. $E = \left(-\frac{\delta P}{\delta V/V}\right) = \left(-\frac{(30-15)\times 101\,325}{(1{,}231-1{,}232)/1{,}232}\right) = 1{,}872$ GPa

et :

$$\chi = \frac{1}{E} = \frac{1}{1{,}872} = 0{,}534 \text{ GPa}$$

b) Nature de la transformation

Considérons un gaz à une pression P, ayant un volume massique $v = 1 / \rho$ et une température T. Soit r la constante du gaz considéré.

Une transformation *polytropique* est une modification de l'état thermodynamique d'un système avec un échange thermique partiel entre ce dernier et son environnement. Un état polytropique se classe donc entre un état isotherme et un état adiabatique. En génie des procédés, un réacteur est dit polytropique quand une partie de la chaleur dégagée par la réaction est enlevée par le système de refroidissement tandis que le reste de la chaleur est accumulé dans le réacteur. La transformation polytropique peut être représentée par l'équation suivante par analogie avec l'équation de *Laplace* :

$$P\,v^x = C^{te} \tag{1.42}$$

où x est une constante qui dépend de γ $(1 < x < \gamma)$. Par conséquent :

$$\mathrm{d}\left(P v^{x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}P} = -\frac{v}{x\ P} \tag{1.43}$$

Donc :

$$\chi = \frac{1}{x P} \tag{1.44}$$

Si la transformation est isotherme alors $x = 1$ et $x = \frac{1}{\rho}$. Si elle adiabatique alors $x = \gamma$ et $\chi = 1/(\gamma P)$. On peut qualitativement représenter les cinq transformations (isotherme, isovolume, isobare, adiabatique, polytropique) sur la Figure 1.8.

D'après la relation (1.43), on peut facilement montrer que la pente d'une transformation isotherme est plus faible que celle d'une transformation polytropique qui elle-même est plus petite que celle d'une transformation adiabatique car $1 < x < \gamma$.

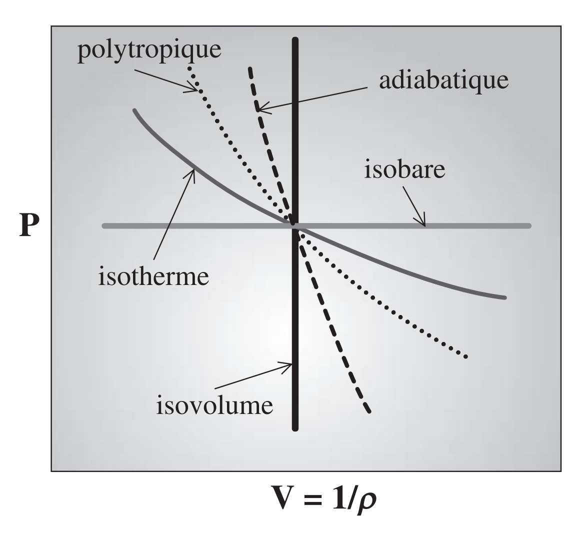


Figure 1.8 – Représentation des différentes transformations thermodynamiques.

c) Écoulement incompressible versus écoulement compressible

À une altitude donnée et constante (les variations d'énergie potentielle étant alors négligeables), l'équation de *Bernoulli* qui sera démontrée dans le Chapitre 4 relie la vitesse U à la pression P par :

$$P + \frac{1}{2}\rho U^{2} = C^{te} \tag{1.45}$$

Et donc :

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \approx \frac{1}{2}\frac{\rho U^2}{E} \tag{1.46}$$

L'expression de la *vitesse du son c* (qui sera démontrée dans le Chapitre 11) est donnée par la relation suivante :

$$c = \sqrt{\left(\frac{E}{\rho}\right)_S} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\right)_S} \tag{1.47}$$

L'indice « S » correspond à une transformation considérée comme isentropique et E est le module d'élasticité. D'où $\delta\rho/\rho \equiv V^2/2c^2 = M_a^2/2$ où $M_a = U/c$ est le nombre de *Mach*.

Interprétation :

Si $\delta\rho/\rho$ est petit alors $M_a^2/2$ est petit et par conséquent l'écoulement peut être qualifié d'incompressible. Par exemple, si on choisit $\delta\rho/\rho \approx 5\%$ (hypothèse d'incompressibilité) alors $M_a \approx 0{,}32$.

La vitesse du son dans le cas d'un gaz parfait est déterminée à partir de l'équation (1.47) et sachant que le volume massique $v = 1 / \rho$, on a :

$$\left[\frac{\mathrm{d}(1/\rho)}{\mathrm{d}P}\right]_S = -\frac{1}{\gamma\rho P} \tag{1.48}$$

Soit :

$$\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\right)_S = \frac{\gamma P}{\rho} \tag{1.49}$$

Par conséquent, la vitesse du son dans le cas particulier du gaz parfait peut s'écrire :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\gamma\ r\ T} \tag{1.50}$$

Pour l'air dans les conditions standards (1 bar, 20 °C), $c \approx 335\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ ce qui donne $V \approx 110\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pour $Ma \approx 0{,}32$ (cas d'un écoulement incompressible). Les différentes appellations d'écoulements en fonction du nombre de *Mach* sont les suivantes :

Si $Ma < 0{,}33$; l'écoulement est dit incompressible

Si $Ma < 1$; l'écoulement est subsonique

Si $Ma = 1$; l'écoulement est sonique

Si $Ma > 1$; l'écoulement est supersonique

Si $Ma \gg 1$; l'écoulement est hypersonique

Exercice

1. Calculer la masse volumique, le poids spécifique ainsi que le volume massique de l'air à 37 °C et 1 bar.

2. Quelles seraient la température et la pression de ce gaz s'il était comprimé de façon isentropique à 40 % de son volume initial ?

3. Si le processus décrit au **2.** avait été isotherme, quelles seraient les valeurs de la pression et de la température ?

SOLUTION . **1.** On a :

$$\rho = \frac{P}{rT} = \frac{10^5}{287 \times 310} = 1{,}1239 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \text{ et donc } \gamma = \rho g = 11{,}025 \text{ N} \cdot \text{m}^{-3} \quad ;$$

$$v = \frac{1}{\rho} = 0{,}889 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$$

2. On a :

$$P_1 (v_1)^\gamma = P_2 (v_2)^\gamma \Rightarrow 10^5 (0{,}889)^{1{,}4} = P_2 (0{,}4 \times 0{,}889)^{1{,}4}$$

Donc $P_2 = 3{,}6 \times 10^5 \text{ Pa} \Rightarrow T_2 = \dfrac{P_2}{r\rho_2} = \dfrac{3{,}6 \times 10^5}{287 \times 2{,}812} = 446 \text{ K} = 173 \text{ °C}$

3. Dans le cas isotherme : $T_2 = T_1 = 37\text{°C}$ et $P\,v = C^{te}$

D'où $P_2 = \dfrac{P_1\, v_1}{v_2} = \dfrac{10^5 \times 0{,}889}{0{,}355} = 2{,}5 \times 10^5 \text{ Pa}$

1.7.6 Tension superficielle

Lorsque l'on observe une goutte de pluie on constate qu'elle est très proche de la forme sphérique. Cette forme correspond à la surface d'échange minimale entre le fluide et le gaz environnant. L'interface entre le fluide et le gaz est caractérisée par un paramètre qui dépend de la nature physico-chimique du fluide et du gaz ainsi que de la température et de la pression dans le gaz. Ce paramètre est appelé *tension superficielle*. Pour en comprendre la signification physique considérons l'expérience représentée sur la Figure 1.9. Elle consiste à étirer un film de savon entre deux tiges, distantes de l, en venant exercer un effort F dans la direction horizontale. Notons bien que cette force ne sert pas seulement à étirer le film mais aussi à maintenir le film avec une aire constante. En effet, sans l'action de cette force, le film tendrait à se rétracter pour retrouver une surface minimale correspondant au minimum de son énergie libre (l'énergie libre spécifique étant définie par : $f = e\text{-}T\,s$).

Pour déplacer le côté AB d'une distance δx, il faut fournir un travail :

$$\delta W = F\ \delta x \tag{1.51}$$

Dans ce cas l'aire de la surface du film va être augmentée de la quantité (en tenant compte des 2 faces du film) :

$$\delta A = 2l\,\delta x \tag{1.52}$$

On appelle σ la tension superficielle définie comme le rapport entre le travail produit par unité de surface :

$$\sigma = \frac{\delta W}{\delta A} \tag{1.53}$$

On voit que pour l'étirage du film de savon on a alors :

$$\sigma = \frac{F}{2l} \tag{1.54}$$

σ a la dimension d'une force par unité de longueur ($N \cdot m^{-1}$). Les tensions de surface de quelques liquides sont données dans le Tableau 1.15. Lorsque l'augmentation de surface a lieu à température constante et sans production d'entropie (ce qui revient à dire que la transformation est réversible) alors le travail W correspond à l'énergie libre de surface.

Surface et énergie

L'existence d'une surface apporte donc au liquide un supplément d'énergie qui peut être, dans certaines conditions, recueilli sous forme de travail. À travail équivalent, il sera d'autant plus facile de créer de la surface que le coefficient de tension superficielle est petit.

Quand la surface croît, l'énergie libre croît aussi. Une évolution spontanée se faisant avec diminution de l'énergie libre, elle se fait donc avec une diminution de la surface puisque, à température et volume constants, la tension superficielle est une constante.

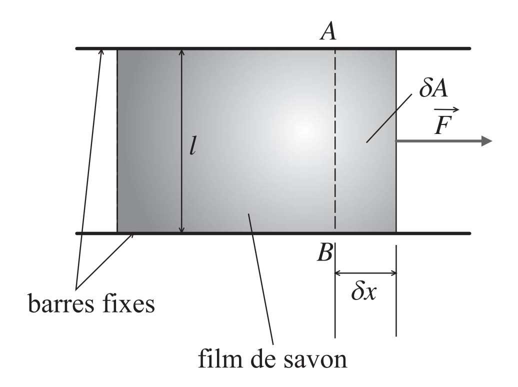


Figure 1.9 – Mise en évidence de la tension superficielle lors de l'expérience de l'étirage d'un film de savon.

La Figure 1.10 représente qualitativement les efforts intermoléculaires des différentes molécules dans un liquide avec une surface libre. On peut remarquer que lorsque la molécule est totalement immergée dans le liquide, cette dernière est en équilibre puisque les efforts s'annulent deux à deux dans les deux directions du repère cartésien. En revanche, lorsque la molécule s'approche de plus en plus de la surface libre, il y a alors un déséquilibre des forces dû à la tension de surface. Un autre exemple concerne le cas d'une goutte de rosée apparaissant sur une feuille de plante et cette goutte est de forme sphérique due au fait qu'elle a tendance à rétrécir à cause de la tension de surface. Par conséquent, sa pression interne est plus grande que sa pression périphérique.

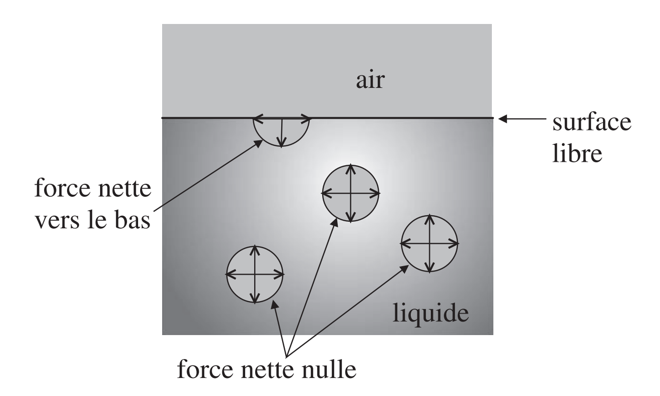


Figure 1.10 – Force intermoléculaire dans un liquide avec une surface libre.

Le phénomène de tension de surface provient de deux forces intermoléculaires :

- forces de cohésion → ce sont les forces d'attraction entre les molécules du liquide ;
- forces d'adhésion → ce sont les forces entre les molécules de différents liquides ou entre un liquide et un solide.

Tableau 1.15 – Tension de surface de quelques liquides à 20 °C.

Liquide	Surface du liquide	σ [N·m^{-1}]
Eau	Air	0,0728
Mercure	Air	0,476
Mercure	Eau	0,373
Alcool méthylique	Air	0,023

1.7.7 Équation de Young-Laplace

On considère le cas d'une bulle sphérique de diamètre D remplie d'un fluide (voir Figure 1.11). On notera qu'en l'absence de gravité, la goutte est sphérique puisque c'est la forme qui correspond au minimum de la surface et par conséquent à l'énergie libre minimale

de surface pour un volume donné de fluide. L'équilibre sur la face projetée de la demi-sphère donne alors :

$$P_1 \frac{\pi D^2}{4} = P_2 \frac{\pi D^2}{4} + \pi D \sigma \tag{1.55}$$

Par conséquent,

$$\delta P = (P_1 - P_2) = \frac{4\ \sigma}{D} \tag{1.56}$$

Cette dernière relation est appelée la loi de Young-Laplace et elle montre que la pression à l'intérieur d'une goutte liquide est donc d'autant plus grande que la goutte est petite.

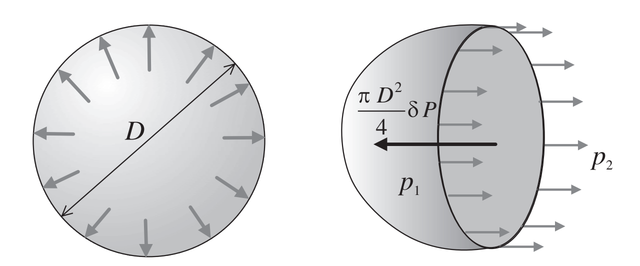


Figure 1.11 – **Équilibre entre l'augmentation de la pression dans la bulle de liquide et la tension de surface.**

Autre démonstration :

On considère toujours la bulle sphérique de diamètre D. Le travail (énergie) est :

$$W = \sigma A = \sigma 4 \pi R^2 \tag{1.57}$$

Supposons que pour une raison quelconque, le rayon de la goutte augmente de la quantité δR ; le travail est alors augmenté de :

$$\delta W = \sigma \delta A = \sigma 8 \pi R \delta R \tag{1.58}$$

L'expansion de la goutte conduit à une variation de la pression du fluide dans la goutte d'une quantité δp et dont le travail est $\delta W_p = \delta p \delta V$ (on notera que la pression du gaz à l'extérieur de la goutte reste constante). La goutte étant à l'équilibre, le travail des forces de pression doit être exactement égal au travail d'expansion de la goutte :

$$\delta W_p = \delta W \tag{1.59}$$

Soit :

$$\Delta p 4 \pi R^2 \delta R = \sigma 8 \pi R \delta R \tag{1.60}$$

On aboutit alors à l'équation de Laplace :

$$\Delta p = \frac{2 \sigma}{R} \tag{1.61}$$

Remarque :

Dans le cas d'une forme quelconque de l'interface (avec plusieurs courbures), la loi de *Laplace* s'écrit de la façon suivante :

$$(P_1 - P_2) = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}\right) \tag{1.62}$$

où $R_1, R_2 \ldots R_n$ sont les différents rayons de courbure de la forme quelconque de l'interface.

1.7.8 Phénomène de mouillabilité pour le contact fluide-solide

Lorsque l'on dépose une goutte d'eau sur une plaque en téflon puis sur une plaque en verre, on constate que la goutte ne s'étale pas du tout de la même façon. Dans le cas du téflon, la goutte a tendance à avoir une conformation sphérique pour limiter au maximum la surface de contact entre le domaine fluide et le domaine solide. Dans le cas du verre, la goutte a au contraire tendance à s'étaler. On appelle ce phénomène la *mouillabilité* d'une surface solide par un fluide. On dira donc que le verre est mouillable à l'eau, alors que le téflon ne l'est pas. En se reportant sur la configuration représentée sur la Figure 1.12, on nommera θ l'*angle de contact* (ou angle de mouillabilité). On distingue alors deux configurations extrêmes :

- $\theta = 0°$, le solide est complètement mouillable au fluide ;
- $\theta = 180°$, le solide n'est pas du tout mouillable au fluide.

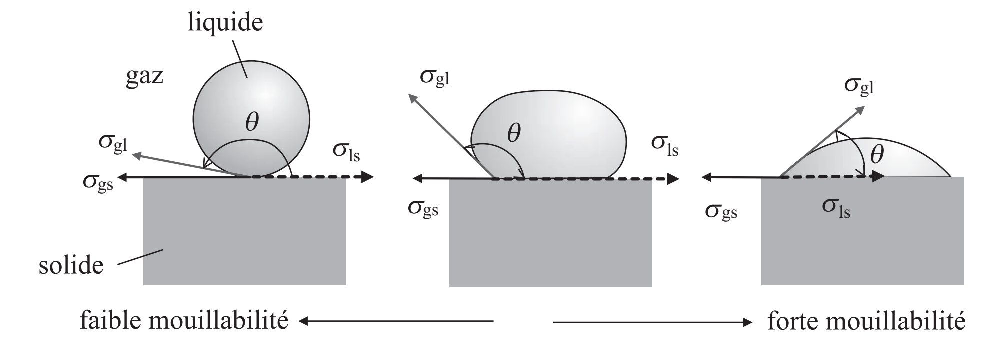


Figure 1.12 – **Forme d'une goutte de liquide sur un substrat solide en fonction de la mouillabilité.**

La *ligne de raccordement* caractérise le périmètre de la surface de contact entre fluide et solide. Sur cette ligne, nous avons coexistence des 3 phases : liquide (*l*), solide (*s*) et gaz (*g*). L'équilibre de la goutte déposée sur le substrat solide est donc une résultante des tensions de surfaces entre le liquide et le gaz (σ_{lg}), le liquide et le solide (σ_{sl}) et le gaz et le solide (σ_{sg}). Ces tensions vont agir sur la ligne raccordement où coexistent les 3 phases. En nous référant au résultat obtenu pour le film de savon, nous voyons alors que pour maintenir chaque élément de longueur de la ligne de raccordement à la valeur

constante δl il faudra que la somme des 3 efforts, correspondant aux tensions superficielles, soit nulle. À l'équilibre, nous devons donc avoir :

$$\sigma_{sg}\,\overrightarrow{\delta l} + \sigma_{sl}\,\overrightarrow{\delta l} + \sigma_{lg}\,\overrightarrow{\delta l} = 0 \tag{1.63}$$

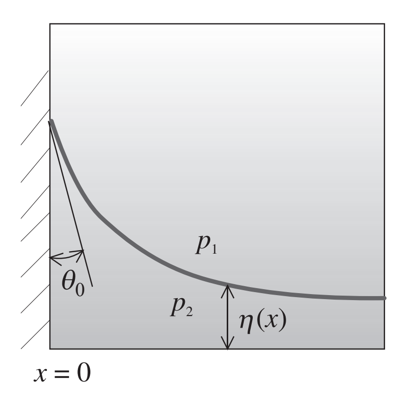
En projetant sur le plan de la surface solide, on obtient la condition de *Young* reliant les 3 valeurs de la tension superficielle et l'angle de mouillabilité sous la forme :

$$\sigma_{sg} = \sigma_{sl} + \sigma_{lg}\cos\theta \tag{1.64}$$

Ainsi, si l'on connaît deux valeurs de la tension superficielle et l'angle de contact, la troisième valeur de mouillabilité peut être déterminée.

Exercice : Forme d'une interface air-eau

Faire une analyse de la forme d'une interface air-eau près d'un mur plan, tel représenté sur la figure ci-dessous, en supposant que la pente est petite, $1/R \approx \mathrm{d}^2\eta/\mathrm{d}x^2$ (où R est le rayon de courbure de l'interface) et la différence de pression à travers l'interface est équilibrée par le produit du poids spécifique et la hauteur de l'interface comme $\Delta p = \rho g \eta$. Les conditions aux limites sont les suivantes : angle de contact de la surface mouillée $\theta = \theta_0$ à $x = 0$ et $\theta = 90°$ lorsque $x \to \infty$. Quelle est la valeur de la hauteur η au mur ?



Solution.
$$\Delta P = (P_1 - P_2) = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Or $R_1 = R$ et $R_2 \to \infty$ donc $\Delta P = (P_1 - P_2) = \dfrac{\sigma}{R}$

De plus $\dfrac{1}{R} = \dfrac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}x^2}$ et $\Delta P = \rho g \eta$

Par conséquent : $\dfrac{d^2\eta}{dx^2} - \dfrac{\rho g \eta}{\sigma} = 0$ et la solution de cette équation est :

$$\eta = A\, e^{-\sqrt{\frac{\rho g \eta}{\sigma}}x} + B\, e^{\sqrt{\frac{\rho g \eta}{\sigma}}x}$$

Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$\begin{cases} x = 0, \quad |\tan\theta_0| = \dfrac{\delta x}{\delta \eta} \Rightarrow \dfrac{d\eta}{dx} = -\text{cotg}\theta_0 \quad \text{(pente négative)} \\ x \to \infty, \quad \dfrac{d\eta}{dx} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}\text{cotg}\theta_0 \text{ et } B = 0$$

Finalement $\eta = \sqrt{\dfrac{\sigma}{\rho g}}\ \text{cotg}\theta_0\, e^{-\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}x}$ et donc $(\eta)_{x=0} = \sqrt{\dfrac{\sigma}{\rho g}}\ \text{cotg}\theta_0$

Exercices

1.1 Dirigeable

Un dirigeable ayant un volume de V = 90 000 m^3 contient de l'hélium dans les conditions atmosphériques standards (pression de 101 kPa, température de 15 °C). Déterminer la masse volumique et le poids total de l'hélium.

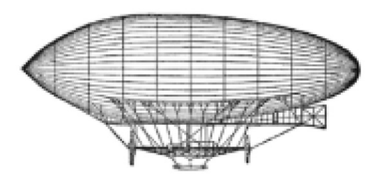


Figure 1.13 – **Représentation du dirigeable.**

1.2 Contrainte de cisaillement dans un fluide visqueux

Un fluide newtonien ayant une densité de $d = 0{,}92$ et une viscosité cinématique $\nu = 4 \times 10^{-4}\,\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ s'écoule sur plaque plane en régime permanent. Le profil de vitesse près de la surface est montré sur la figure ci-dessous et suit la loi $u(y)/U = sin(\pi y/2\delta)$.

Déterminer l'amplitude et la direction de la contrainte de cisaillement développée sur la plaque en fonction de U et δ.

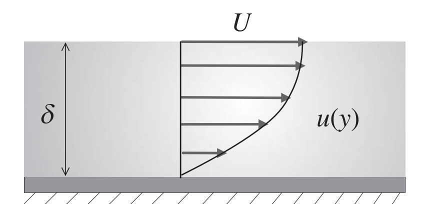


Figure 1.14 – **Représentation de l'écoulement sur une plaque.**

1.3 Plaque mobile dans un fluide

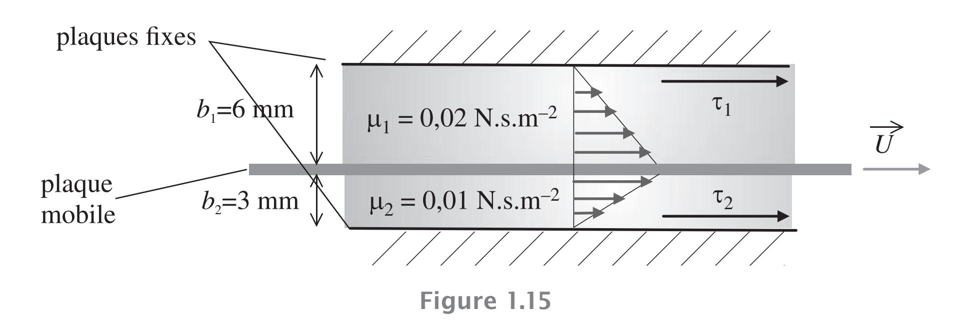


Figure 1.15

Une grande plaque mobile se trouve entre deux grandes plaques fixes comme illustré sur la figure ci-dessus. Deux fluides newtoniens ayant des viscosités indiquées sur la figure se trouvent de part et d'autre de la plaque mobile, le profil de vitesse étant linéaire. Déterminer l'amplitude et la direction des contraintes de cisaillement qui agissent sur les murs fixes lorsque la plaque mobile se déplace à une vitesse de $U = 4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. On supposera que la distribution des vitesses entre les parois de part et d'autre de la plaque mobile est linéaire.

1.4 Fluide en rotation

Déterminer le couple requis pour faire tourner un cylindre vertical de diamètre 50 mm à une vitesse angulaire de 30 $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ qui se trouve à l'intérieur d'un autre cylindre de diamètre 50,2 mm. L'entrefer entre les deux cylindres est rempli d'huile SAE (Society of American Engineers) de viscosité $\mu = 0{,}1$ Pa.s à 20 °C. La longueur du cylindre interne est de 200 mm. On néglige les effets de bords supérieur et inférieur et on suppose que la distribution de vitesse dans l'entrefer est linéaire dans la direction radiale. Si la température de l'huile augmente jusqu'à la valeur de 80 °C pour laquelle la viscosité est égale à $\mu = 8 \times 10^{-3}$ Pa.s, quel serait alors le pourcentage de changement de la valeur du couple ?

Figure 1.16 – **Vue de dessus de l'écoulement entre deux cylindres (le cylindre intérieur tourne à $30\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$).**

1.5 Air dans un piston

Dans un appareillage piston-cylindre, le volume initial d'air est de 90 litres à une pression de 130 kPa et une température de 26 °C. Si la pression est doublée alors que le volume décroît jusqu'à 56 litres, calculer la température finale et la masse volumique de l'air.

1.6 Profondeur de l'océan

À une profondeur de 6,4 km dans l'océan la pression spécifique est d'environ 666 bars (voir figure ci-dessous). On suppose que le poids spécifique est de $\gamma_1 = 10\ \text{kN}\cdot\text{m}^{-3}$ à la surface libre et le module d'élasticité moyen est de E = 22 000 bars.

1. Quel est le changement de volume massique entre la surface libre et celle à la profondeur de 6,4 km ?

2. Quel est le volume massique à cette profondeur ?

3. Quel est le poids spécifique à cette profondeur ?

4. Quel est le pourcentage de changement dans la valeur du volume massique et celui du poids spécifique ?

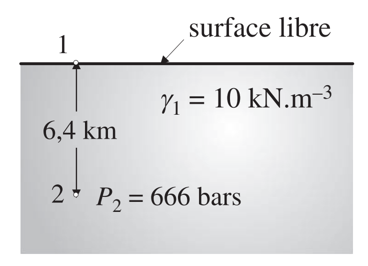


Figure 1.17 – **Schéma qualitatif de l'océan.**

1.7 Compression

Un volume de 3 m^3 de CO_2 à 10 °C et 1,03 bar est comprimé de façon isotherme jusqu'à un volume de 0,6 m^3.

1. Quelle est la pression résultante ?

2. Quelles seraient la pression et la température si le processus avait été isentropique ? L'exposant adiabatique γ pour le CO_2 est de 1,28.

1.8 Glissement d'une dalle

Une dalle de 18 kg (voir figure ci-dessous) glisse sur un plan incliné de 15° par rapport à l'horizontale et sous 3 mm de film d'huile de viscosité $\mu = 8{,}14 \times 10^{-2}$ Pa.s ; la surface de contact est de $S = 0{,}3\ \text{m}^2$. Calculer la vitesse terminale U_T de la dalle.

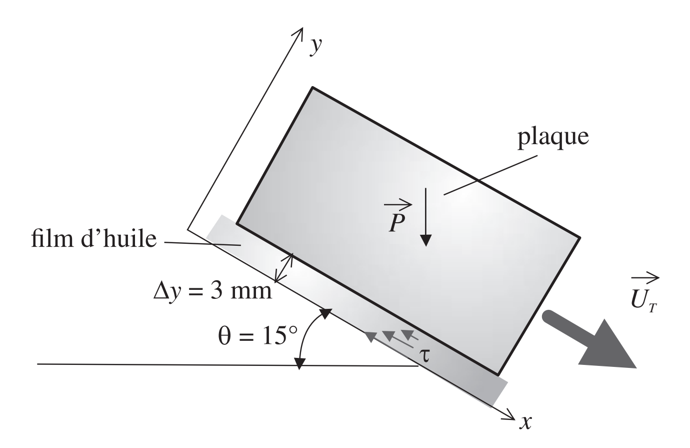


Figure 1.18 – **Glissement d'une dalle sous un film d'huile.**

1.9 Rotation dans un fluide visqueux

Un disque de rayon r_0 tourne à une vitesse ω dans un bain d'huile de viscosité μ comme illustré sur la figure ci-dessous. En supposant un profil de vitesse linéaire et en négligeant le cisaillement sur les bouts du disque, déterminer l'expression du couple visqueux C sur le disque.

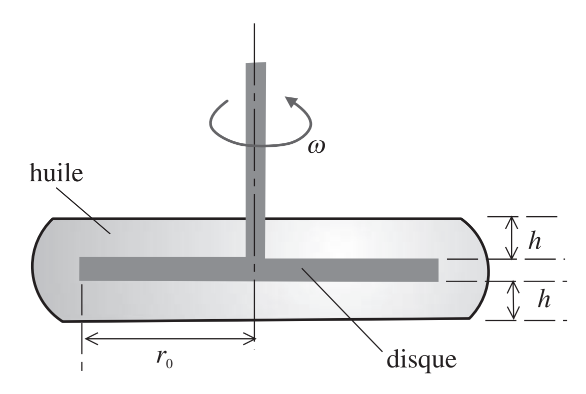


Figure 1.19 – **Schéma de l'installation d'un disque tournant dans un bain d'huile.**

1.10 Capillaire

Sur la figure ci-dessous, estimer la dépression h pour le mercure dans le tube de glace capillaire. L'angle θ représenté sur cette figure vaut 40°.

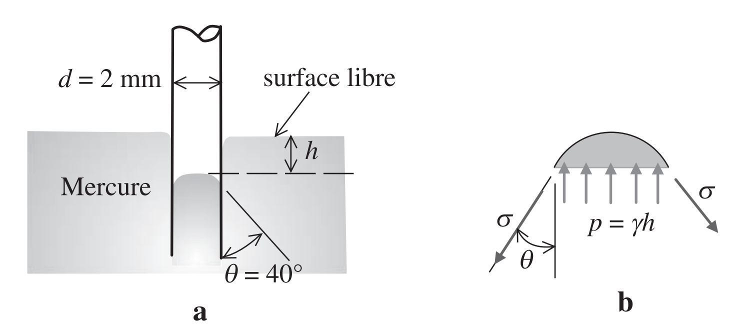


Figure 1.20 – Tube de glace capillaire dans du mercure.

Solutions

1.1 À partir de l'équation d'état d'un gaz idéal, on a : $r = R/M$ où R est la constante des gaz parfaits ($R = 8{,}32\ \text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) et M est la masse molaire de l'hélium ($M = 4{,}003\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$) et donc $r = 2077\ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. La masse volumique peut alors être calculée :

$$\rho = \frac{P}{rT} = \frac{101 \times 10^3}{2077 \times (15 + 273)} = 0{,}169\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Ainsi que le poids : $P = \rho g V = 0{,}169 \times 9{,}81 \times 9 \times 10^4 = 1{,}49 \times 10^5\ \text{N}$

1.2 On a $\tau_{\text{surface}} = \mu \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \right)_{y=0}$ où $\mu = \nu \rho$.

Or $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{\pi}{2} \frac{U}{\delta} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{y}{\delta} \right)$ et à $y = 0$, on a $\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \right)_{y=0} = \frac{\pi}{2} \frac{U}{\delta}$

Comme $\rho = d\,\rho_{\text{H}_20} = 0{,}92 \times 1000 = 920\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$

D'où $\tau_{\text{surface}} = \rho \nu \frac{\pi}{2} \frac{U}{\delta} = 920 \times 4 \times 10^{-4} \frac{\pi}{2} \frac{U}{\delta} = 0{,}578 \frac{U}{\delta}\ \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$

1.3 On a $\tau = \mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \mu \frac{U}{b}$

Par conséquent : $\tau_1 = \mu_1 \dfrac{U}{b_1} = 0{,}02 \times \dfrac{4}{6 \times 10^{-3}} = 13{,}3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$

Et : $\tau_2 = \mu_2 \dfrac{U}{b_2} = 0{,}01 \times \dfrac{4}{3 \times 10^{-3}} = 13{,}3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$.

Les deux contraintes visqueuses sont égales sur les parois fixes.

1.4 Le couple δC causé par la contrainte visqueuse τ sur le cylindre intérieur est égal à $\delta C = R_i \tau \ \delta S$ où $\delta S = (R_i \, \delta\theta) l$ est la surface élémentaire du cylindre interne. Par conséquent : $\dfrac{dC}{d\theta} = R_i^2 l \tau$ et par intégration, on obtient :

$$C = R_i^2 l \tau \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi R_i^2 l \tau$$

Pour une distribution linéaire de la vitesse dans l'entrefer, on peut écrire :

$$\tau = \mu \frac{R_i \omega}{R_0 - R_i}$$

Donc : $C = \dfrac{2\pi R_i^3 l \, \mu \omega}{R_0 - R_i}$

D'où à 20 °C : $C = \dfrac{2\pi (0{,}05)^3 (0{,}2)(0{,}1)(30)}{(0{,}0502 - 0{,}05) / 2} = 4{,}71 \text{ N} \cdot \text{m}$

Et à 80 °C : $C = 4{,}71 \dfrac{\mu_{80°C}}{\mu_{20°C}} = 4{,}71 \dfrac{8 \times 10^{-3}}{0{,}1} = 0{,}3768 \text{ N} \cdot \text{m}$. Le pourcentage de changement de la valeur du couple est donc $\dfrac{(4{,}71 - 0{,}3768)}{4{,}71} \times 100 = 92\%$.

1.5

$$\rho_1 = \frac{P_1}{rT_1} = \frac{130 \times 10^3}{287 \times (26 + 273)} = 1{,}515 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Par conséquent, la masse de l'air correspondante est :

$$m = 1{,}515 \times 0{,}09 = 0{,}1364 \text{ kg}$$

Donc : $\rho_2 = \dfrac{P_2}{rT_2} \Rightarrow \dfrac{0{,}1364}{0{,}056} = \dfrac{2 \times (130 \times 10^3)}{287 \times T_2}$

D'où : $T_2 = 372 \ K$ ou $99 \ °C$ et $\rho_2 = \dfrac{0{,}1364}{0{,}056} = 2{,}44 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

1.6

1. $v_1 = \dfrac{1}{\rho_1} = \dfrac{g}{\gamma_1} = \dfrac{9{,}81}{10^4} = 9{,}81 \times 10^{-4}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$

Le module d'élasticité s'écrit : $E = -v\dfrac{\text{d}P}{\text{d}v}$ et donc :

$$\Delta v = -\frac{v_1\ \Delta P}{E} = -\frac{9{,}81 \times 10^{-4}\ (666 - 0)}{22000} = -2{,}95 \times 10^{-5}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$$

2. $v_2 = v_1 + \Delta v = (9{,}81 - 0{,}295\ ) \times 10^{-4} = 9{,}514 \times 10^{-4}\,\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$

3. $\gamma_2 = \dfrac{g}{v_2} = \dfrac{9{,}81}{9{,}514 \times 10^{-4}} = 10{,}31\ \text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$

4. $\left|\dfrac{\Delta v}{v_1}\right| = \dfrac{0{,}296 \times 10^{-4}}{9{,}81 \times 10^{-4}} = 3{,}01\ \%$

$$\left|\frac{\Delta \gamma}{\gamma_1}\right| = \frac{1{,}031 \times 10^4 - 10^4}{10^4} = 3{,}1\ \%$$

1.7

1. Cas isotherme : $x = 1 \Rightarrow P\,v = C^{te}$ avec $(v = 1\ /\ \rho)$. Soit m la masse du CO_2. On peut donc écrire : $1{,}03\dfrac{3}{m} = p_2\dfrac{0{,}6}{m} \Rightarrow p_2 = 5{,}15\ \text{bar}$

2. Cas isentropique : $x = \gamma = 1{,}28$ et $(P\,v)^\gamma = C^{te}$. D'où :

$$1{,}03\left(\frac{3}{m}\right)^{1{,}28} = p_2\left(\frac{0{,}6}{m}\right)^{1{,}28} \Rightarrow p_2 = 8{,}08\ \text{bar}$$

De plus $T_2 = T_1\left(\dfrac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Rightarrow T_2 = (10 + 273)\left(\dfrac{5{,}15}{1{,}03}\right)^{\frac{0{,}28}{1{,}28}} \Rightarrow T_2 = 402{,}4\ \text{K}$

1.8

$\sum F_x = 0 \Rightarrow P\sin\theta - \tau\ S = 0$ où P est le poids de la dalle.

Or $\tau = \mu\dfrac{\text{d}u}{\text{d}y} = (8{,}14 \times 10^{-2})(U_T/0{,}003) = 27{,}1\,U_T$

Donc $18 \times 9{,}81 \times \sin 15° - 27{,}1 \times U_T \times 0{,}3 = 0 \Rightarrow U_T = 5{,}62\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

1.9

$\tau = \mu \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \mu \dfrac{r\omega}{h}$ sur les deux côtés.

Or : $\mathrm{d}C = 2\left(r\tau\, dA\right) = 2\left\{r\mu \dfrac{r\omega}{h} 2\pi r\,\mathrm{d}r\right\} = 4\,\dfrac{\mu\omega\pi}{h}\left(r^3\,\mathrm{d}r\right)$

D'où : $C = 4\,\dfrac{\mu\omega\pi}{h}\displaystyle\int_0^{r_0}\left(r^3\,\mathrm{d}r\right) = 4\,\dfrac{\mu\omega\pi}{h}\left[\dfrac{r^4}{4}\right]_0^{r_0} = \dfrac{\mu\omega\pi r_0^4}{h}$

1.10 On considère le ménisque du mercure comme un élément solide de poids négligeable. Lorsqu'on ajoute toutes les forces dans la direction verticale, on obtient :

$$-\sigma(\pi d)\cos\theta + p\left(\pi d^2/4\right) = 0$$

Et donc $-0{,}514(\pi \times 0{,}002)(\cos 40°) + 13\,600 \times 9{,}81 \times h\left(\pi \times (0{,}002)^2/4\right) = 0$

Par conséquent : $h = 5{,}91$ mm.

Bibliographie

CANDEL S., *Mécanique des fluides*, DUNOD, 1990.

COMOLET R., *Mécanique expérimentale des fluides*, *Statique et dynamique des fluides non visqueux*, tome 1, DUNOD, Paris, 2002.

DESJARDINS D., COMBARNOUS M., BONNETON N., *Mécanique des fluides-Problèmes résolus avec rappels de cours*, DUNOD, Paris, 2002.

GERMAIN P., *Mécanique*, tome 1, Ellipse École Polytechnique, Paris, 1986.

GUYON E., HULIN J.-P., PETIT L., *Hydrodynamique physique*, Inter Éditions, Paris, 1991.

LANDAU L., LIFCHITZ E., *Physique théorique*, *Mécanique des fluides*, tome VI, Ed. Librairie du Globe, 1971.

MONAVON A., *Mini manuel de Mécanique des fluides*, DUNOD, Paris, 2010.

PEREZ J.-P., *Thermodynamique : fondements et applications*, DUNOD, 2001.

STATIQUE DES FLUIDES 2

PLAN

OBJECTIFS

- Démontrer la relation de l'hydrostatique
- Calculer la pression en tout point d'un fluide immobile
- Calculer les efforts exercés par un fluide au repos sur une surface indéformable
- Déterminer le point application de la résultante des efforts exercés
- Démontrer le principe d'Archimède

2.1 INTRODUCTION

La statique des fluides s'intéresse à l'étude des fluides au repos, lorsque le fluide n'est animé d'aucun mouvement. L'objectif est de calculer la pression en tout point du domaine fluide. Un deuxième objectif est le calcul des efforts exercés par ce fluide au repos sur des surfaces solides indéformables avec lequel il est en contact. Le champ d'applications est très large et concerne par exemple le calcul de la force résultante appliquée sur un barrage ou sur un objet partiellement ou complètement immergé, ainsi que le calcul de la pression dans des réservoirs.

Nous démontrerons dans un premier temps l'équation de l'hydrostatique en nous basant sur le principe fondamental de la statique appliqué à un petit élément du volume fluide. Nous abordons ce problème sous l'aspect discret puis continu afin de nous familiariser avec ces outils pour les chapitres suivants. Ceci nous permettra en particulier de définir l'expression de l'effort exercé par un fluide au repos sur une surface solide ainsi que le moment de cet effort résultant. Nous introduirons ensuite le principe d'Archimède qui est un des outils indispensable au calcul des efforts exercés par un fluide sur un corps immergé ou partiellement immergé. Nous conclurons ce chapitre par des exercices d'application.

2.2 Relation de la statique

2.2.1 Force de pression

Soit $\overrightarrow{\delta F}(M)$ la force élémentaire exercée par un fluide sur un élément de surface δS entourant le point M. Cette force est perpendiculaire à la surface. La pression est définie comme :

$$p(M) = \frac{\delta F(M)}{\delta S} \tag{2.1}$$

Ceci conduit à définir la force exercée par un fluide sur une surface S à partir de la répartition de pression sur la surface comme :

$$\vec{F} = -\iint_S p(M)\,\mathrm{d}S\,\vec{n} \tag{2.2}$$

Dans cette relation $\vec{n}$ désigne la normale extérieure à la surface en tout point. La relation (2.2) trouve son intérêt dans le fait que la répartition des efforts est continue et doit donc faire appel à une intégration de fonction d'espace qui est ici la pression.

2.2.2 Principe fondamental de la statique (PFS)

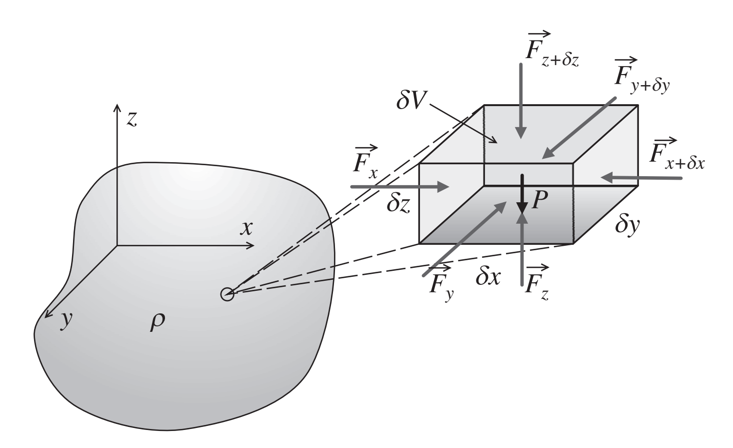


Figure 2.1 – **On isole un élément parallélépipédique de dimensions infiniment petites δx, δy, δz d'un domaine fluide au repos.**

Considérons un volume de fluide, de masse volumique ρ, dans l'espace à 3 dimensions et dans lequel nous isolons un domaine parallélépipédique δV de dimensions δx, δy et δz. Les forces exercées sur ce domaine par le fluide environnant sont reportées sur la Figure 2.1. On distingue :

- le poids ($\vec{g}$ est l'accélération de la pesanteur) :

$$\vec{P} = m\vec{g} = -\rho\,\delta V\,g\,\vec{z} = -\rho\,\delta x\,\delta y\,\delta z\,g\,\vec{z} \tag{2.3}$$

- les forces de pression exercées sur les surfaces du parallélépipède. On suppose ici que le volume est de dimensions infiniment petites pour que l'on puisse considérer que la pression p exercée sur chaque surface élémentaire est uniforme. En appliquant la définition de la force de pression, la résultante des actions de pression suivant x est :

$$R_x = F_x - F_{x+\delta x} = p(x,y,z)\delta y\delta z - p(x+\delta x,y,z)\delta y\delta z \qquad (2.4)$$

Comme δx est un infiniment petit, on peut effectuer un développement limité au premier ordre de $p(x+\delta x,y,z)$ sous la forme :

$$p(x+\delta x,y,z) = p(x,y,z) + \delta x\frac{\partial p(x,y,z)}{\partial x} + \ldots \qquad (2.5)$$

On trouve alors :

$$R_x = -\frac{\partial p(x,y,z)}{\partial x}\delta x\delta y\delta z \qquad (2.6)$$

En effectuant le même raisonnement suivant y et z on trouve :

$$R_y = -\frac{\partial p(x,y,z)}{\partial y}\delta x\delta y\delta z \qquad (2.7)$$

et

$$R_z = -\frac{\partial p(x,y,z)}{\partial z}\delta x\delta y\delta z \qquad (2.8)$$

Le volume de fluide étant à l'équilibre, les forces de pressions équilibrent le poids. On en déduit alors à partir des relations (2.3), (2.6), (2.7) et (2.8) que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x,y,z)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial p(x,y,z)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial p(x,y,z)}{\partial z} &= -\rho g \end{aligned} \qquad (2.9)$$

Soit encore de manière plus synthétique :

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g} \qquad (2.10)$$

La dernière relation est appelée relation de l'hydrostatique. Elle démontre, qu'à masse volumique et accélération de la pesanteur constantes, plus grande est la profondeur dans le fluide et plus grande est la pression.

2.2.3 Utilisation de la formulation continue

Considérons le domaine fluide représenté sur la Figure 2.2 et isolons un volume élémentaire δV et d'aire δS entourant un point M de ce domaine. Le fluide étant toujours au repos, nous lui appliquons le principe fondamental de la statique. Comme précédemment nous distinguons pour les efforts exercés sur ce volume élémentaire :

- le poids :

$$\vec{P} = m\vec{g} = \iiint_{\delta V} \rho\,\vec{g}\,\mathrm{d}V \tag{2.11}$$

où ρ est la masse volumique du fluide et m sa masse.
- les forces de pression agissant sur la surface δS par le fluide environnant :

$$\vec{F}\left(M,\vec{n}\right) = -\iint_{\delta S} p(M)\,\mathrm{d}S\,\vec{n} \tag{2.12}$$

La force $\vec{F}\left(M,\vec{n}\right)$ est exercée perpendiculairement à la surface où $\vec{n}$ est la normale « sortante » à la paroi et p(M) est la pression exercée sur δS.

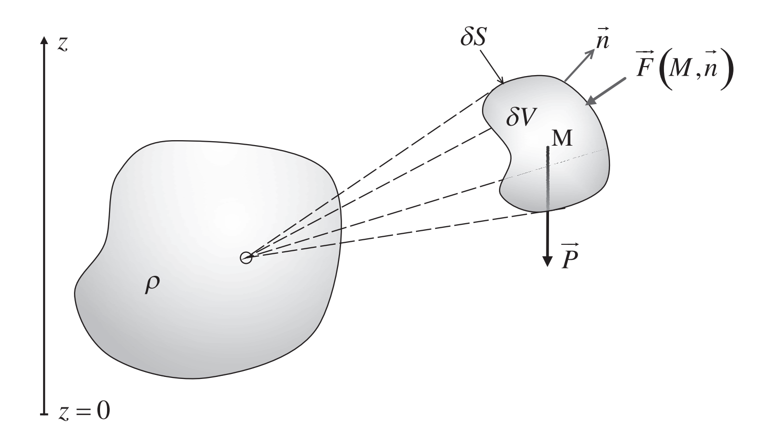


Figure 2.2 – **On isole un volume élémentaire de fluide d'un domaine fluide au repos.**

Le volume δV de fluide étant à l'équilibre, la somme des efforts exercés est nulle :

$$\iiint_{\delta V} \rho\vec{g}\,\mathrm{d}V - \iint_{\delta S} p\vec{n}\,\mathrm{d}S = \vec{0} \tag{2.13}$$

En appliquant le théorème du gradient (voir annexes mathématiques), on transforme l'intégrale de surface en intégrale de volume :

$$\iint_{\delta S} p\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_{\delta V} \vec{\nabla} p\,\mathrm{d}V \tag{2.14}$$

Ce qui conduit pour la relation (2.13) à :

$$\iiint_{\delta V} \rho\,\vec{g}\,\mathrm{d}V - \iiint_{\delta V} \vec{\nabla} p\,\mathrm{d}V = 0 \tag{2.15}$$

Et donc finalement, comme cette relation est valable quel que soit le volume δV choisi, on retrouve la relation de l'hydrostatique (relation (2.10)) :

$$\rho\,\vec{g} - \vec{\nabla} p = \vec{0} \tag{2.16}$$

2.3 Intégration de la relation de l'hydrostatique

Plaçons-nous dans le cas le plus simple où la masse volumique est indépendante de la pression et où la pression ne varie qu'avec l'altitude z. La projection de la relation (2.16) selon l'axe z ascendant (voir Figure 2.3) conduit à :

$$\mathrm{d}p(z) = -\rho g \,\mathrm{d}z \tag{2.17}$$

Cette relation s'intègre facilement :

$$\int_{p_0}^{p} \mathrm{d}p(z) = -\int_{0}^{z} \rho g \,\mathrm{d}z \tag{2.18}$$

Soit :

$$p(z) - p_0 = -\rho g z \tag{2.19}$$

p_0 est une pression de référence prise à une altitude de référence nulle. On pourra ainsi écrire que la différence de pression entre deux points A et B, aux altitudes z_A et z_B respectivement, dans un fluide au repos est :

$$p_B - p_A = \gamma(z_B - z_A) = \gamma h \tag{2.20}$$

où $\gamma = \rho g$ est appelé le poids spécifique du fluide (voir chapitre 1). Comme le montre la relation (2.19), cette différence de pression est indépendante de la position des points sur le plan (xy). Ceci est illustré sur la Figure 2.3. Il est souvent utile dans le cas des problèmes à surface libre (tel représenté sur cette figure) de prendre l'altitude de référence à la surface libre et dans ce cas la pression de référence est la pression atmosphérique.

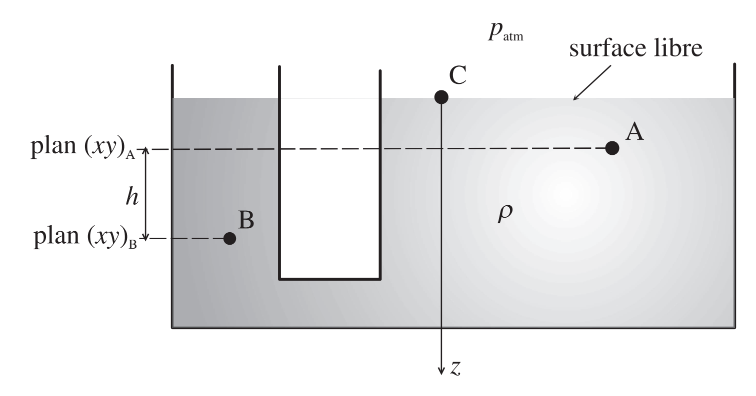


Figure 2.3 – Différence de pression entre 2 points d'un fluide au repos.

Lorsque la masse volumique du fluide varie avec la pression ou avec la température on doit alors connaître la fonction $\rho(p,T)$ pour résoudre la relation (2.16) de l'hydrostatique. Considérons par exemple la variation donnée par la loi des gaz parfaits (voir chapitre 1) :

$$\frac{p}{\rho} = rT \tag{2.21}$$

où r est la constante des gaz parfaits. En introduisant cette fonction de ρ dans la relation (2.17), on trouve :

$$\mathrm{d}p(z) = -\frac{p}{rT} g \, \mathrm{d}z \tag{2.22}$$

Soit :

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{g}{rT} \, \mathrm{d}z \tag{2.23}$$

Et donc, si l'on suppose une atmosphère isotherme (la température ne dépend pas de z) :

$$\int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{g}{rT} \int_{0}^{z} \mathrm{d}z \tag{2.24}$$

Ce qui donne finalement :

$$p = p_0 e^{-\frac{g}{rT} z} \tag{2.25}$$

De manière générale, pour traduire une dépendance de la masse volumique à la pression il faut utiliser le coefficient de compressibilité isotherme χ_T qui traduit la variation de volume du fluide en fonction de la pression à température constante (défini au chapitre 1) :

$$\chi_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \tag{2.26}$$

Soit :

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \chi_T \, \mathrm{d}p \tag{2.27}$$

En intégrant et en supposant que la compressibilité isotherme est constante, cela conduit à :

$$\rho = \rho_0 \, e^{\chi_T (p - p_0)} \tag{2.28}$$

En remplaçant cette expression de ρ dans la relation (2.17), on trouve :

$$\mathrm{d}p = -\rho_0 \, e^{\chi_T (p - p_0)} \, g \, \mathrm{d}z \tag{2.29}$$

Soit :

$$e^{-\chi_T (p - p_0)} \mathrm{d}p = -\rho_0 \, g \, \mathrm{d}z \tag{2.30}$$

Que l'on intègre :

$$\int_{p_0}^{p} e^{-\chi_T (p - p_0)} \, \mathrm{d}p = -\rho_0 \, g \int_{0}^{z} \mathrm{d}z \tag{2.31}$$

Ce qui conduit au résultat final :

$$p = p_0 - \frac{1}{\chi_T} \ln(1 + \chi_T \, \rho_0 \, g \, z) \tag{2.32}$$

Exercice : atmosphère polytropique

Dans l'atmosphère, on admet que les variables thermodynamiques vérifient les lois polytropiques suivantes :

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{x-1}{x}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{x-1}$$

Avec $1 \leqslant x \leqslant \gamma$ (défini au chapitre 1). À partir de la relation de l'hydrostatique, déterminer les fonctions $p(z)$, $\rho(z)$ et $T(z)$.

Solution. La relation de l'hydrostatique ($\vec{\nabla} p = \rho \vec{g}$) s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{\rho_0\, g}{p_0}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Posons les changements de variables : $z' = z\dfrac{\rho_0\, g}{p_0}$ et $p' = \dfrac{p}{p_0}$. La relation précédente devient alors :

$$\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}z'}p'^{-1/x} = -1$$

Soit :

$$p' = \left(A - \frac{x-1}{x}z'\right)^{\frac{x}{x-1}}$$

Pour z = 0 on a $p = p_0$, la constante d'intégration est A = 1 et on en déduit le résultat final :

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{x-1}{x}z\frac{\rho_0\, g}{p_0}\right)^{\frac{x}{x-1}} \qquad (2.33)$$

et par conséquent :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{x-1}{x}z\frac{\rho_0\, g}{p_0}\right)^{\frac{1}{x-1}}$$

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 - \frac{x-1}{x}z\frac{\rho_0\, g}{p_0}\right)$$

2.4 Manomètres

La mesure de pression statique dans un liquide est obtenue à partir d'un manomètre. Le dispositif le plus simple est le manomètre en U tel que celui représenté sur la Figure 2.4. Ce manomètre est raccordé à une enceinte contenant un fluide à la pression p_A. Il est composé de 2 fluides de poids spécifiques γ_1 et γ_2 respectivement.

La relation de l'hydrostatique (2.20) nous permet d'écrire des relations entre les pressions aux points A, M, N et B :



$$\begin{cases} p_M = p_N \\ p_M = p_A + \gamma_1 h \\ p_N = p_B + \gamma_2 H \end{cases} \tag{2.34}$$

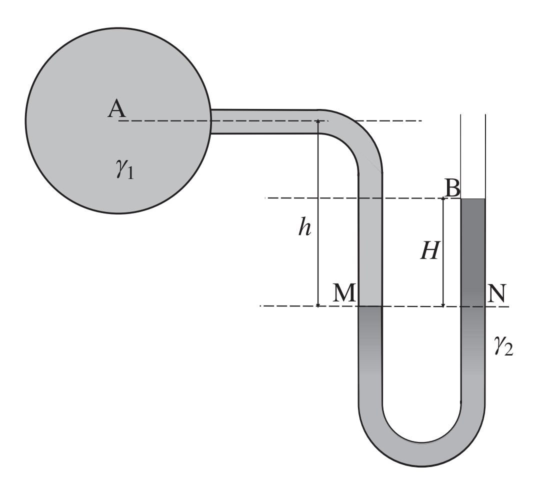
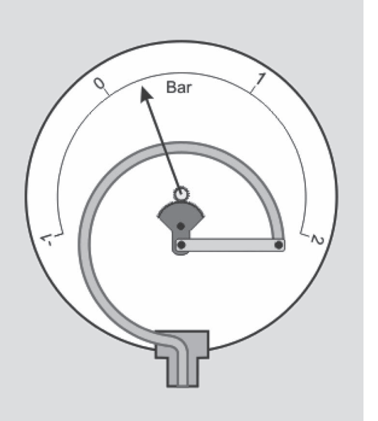


Figure 2.4 – **Mesure de la pression d'un réservoir par manomètre en U.**

Manomètre de Bourdon

Le manomètre de *Bourdon*, sous sa forme plus simple, est composé d'un tube hélicoïdal. Une extrémité du tube est scellée et libre de ses déplacements, l'autre extrémité est fixe et connectée à la chambre ou au conduit dont la pression doit être mesurée. Lorsque la pression à mesurer augmente, le tube se déroule, et inversement. Ce mouvement est transmis par une liaison mécanique à un système d'engrenages connecté à une aiguille. L'aiguille est placée devant un cadran portant les indications de valeur de la pression relative à la position de l'aiguille (ce qui nécessite bien sûr un travail préalable d'étalonnage).



Ceci conduit donc à la valeur de la pression effective en A (la pression au point B étant à la pression atmosphérique) :

$$p_A = \gamma_2 H - \gamma_1 h \qquad (2.35)$$

Il existe d'autres technologies de manomètres tels que le manomètre à membrane. Dans ce cas le fluide exerce une force sur une membrane qui va se déformer. La mesure de cette déformation par capteur capacitif et l'utilisation d'une table d'étalonnage conduit à la pression dans le fluide.

2.5 Efforts exercés sur une surface indéformable – point d'application de la résultante

Imaginons un fluide au repos exerçant un effort de pression sur une surface solide comme cela est représenté sur la Figure 2.5. L'effort résultant est la somme des efforts exercés par le fluide sur la surface solide :

$$\vec{F} = -\iint_A p(z)\vec{n}\,\mathrm{d}S \qquad (2.36)$$

Dans cette relation il faut intégrer la variation de pression en fonction de l'altitude correspondant à la configuration étudiée (on pourra ainsi se référer aux solutions de référence étudiées précédemment, relations (2.19), (2.25), (2.32) ou bien encore (2.33)).

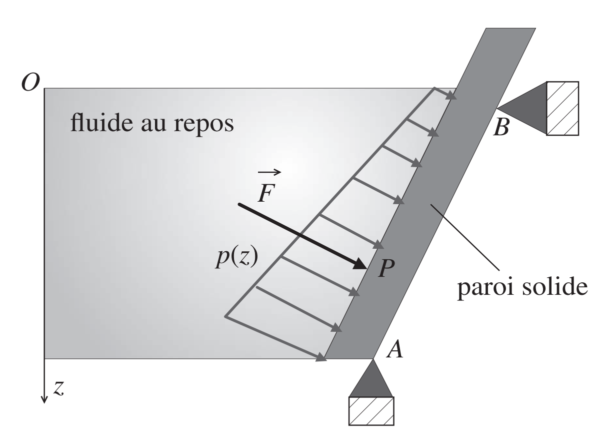


Figure 2.5 – Force exercée par un fluide au repos sur une paroi solide fixe.

Afin de déterminer le point d'application P de la résultante $\vec{F}$ des forces de poussée sur la surface solide, on calcule $\overrightarrow{OP}$ tel que le moment des actions de poussée au point O (choisi de manière arbitraire) soit égal au moment de la résultante (ceci constitue le théorème du moment) :

$$\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge p\vec{n}\,\mathrm{d}S \qquad (2.37)$$

Connaissant l'effort exercé sur la surface solide, il est ainsi possible de déterminer les conditions à appliquer sur la surface solide pour la maintenir en équilibre sous l'action du fluide et de son poids.

2.6 Loi de Jurin

Imaginons que l'on plonge un tube cylindrique de petit diamètre dans un liquide de masse volumique ρ_L comme cela est représenté sur la Figure 2.6. On observe tout d'abord que la surface libre de fluide dans le capillaire forme un ménisque. On observe d'autre part une différence de niveau entre la surface libre de la colonne de liquide et la surface libre du fluide à l'extérieur du capillaire à l'interface avec le gaz de masse volumique ρ_G. En première approximation, le phénomène d'ascension capillaire peut être compris en utilisant l'équation de *Young* et *Laplace* (voir chapitre 1). Calculons cette différence de niveau appelée *hauteur d'ascension capillaire.*

Supposons que le ménisque soit formé dans un tube de rayon r et qu'il ait la forme d'une calotte sphérique de rayon R. La différence de pression qui existe entre les deux points 1 et 2 situés de part et d'autre de l'interface sphérique vaut, d'après la loi de *Laplace* :

$$p_1 - p_2 = \frac{2\sigma}{R} = \frac{2\sigma\cos\theta}{r} \tag{2.38}$$

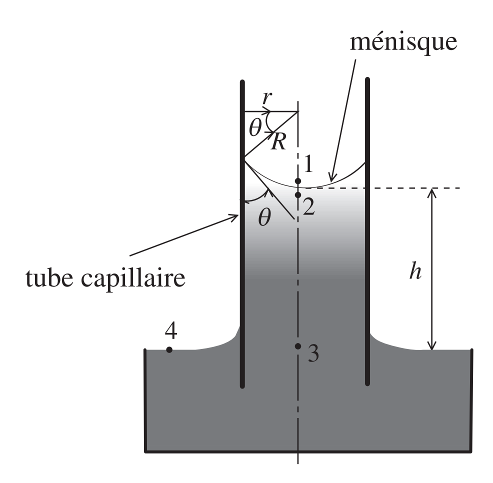


Figure 2.6 – Expérience pour démontrer l'existence du phénomène de remontée capillaire.

où θ représente l'angle de contact au point de raccordement des trois phases (c'est l'angle qui a été défini par la relation de *Young-Laplace* au chapitre 1) et σ est la tension de surface entre le gaz et le liquide. D'autre part, la différence de pression hydrostatique entre les points 2 et 3 vaut :

$$p_2 - p_3 = -\rho_L\, g\, h \tag{2.39}$$

La différence de pression qui existe dans le gaz entre les points 1 et 4 vaut :

$$p_4 - p_1 = \rho_G \, g h \tag{2.40}$$

En effectuant la somme membre à membre des trois relations (2.38), (2.39) et (2.40), on trouve :

$$p_4 - p_3 = \frac{2\sigma \cos\theta}{r} + (\rho_G - \rho_L) g h \tag{2.41}$$

Comme les points 3 et 4 sont à la même altitude et que le point 4 est à l'interface liquide-gaz alors $p_3 = p_4$, nous obtenons l'expression de la hauteur de remontée d'eau dans le capillaire :

$$h = -\frac{2\sigma \cos\theta}{r(\rho_L - \rho_G) g} \tag{2.42}$$

La hauteur h est maximale lorsque $\theta = 0$: c'est le cas d'un liquide parfaitement mouillant ; $h > 0$ ($0 < \theta < 90°$) correspond à l'eau par exemple (voir Figure 2.7 (a)).

- $h = 0$ pour $\theta = 90°$, le niveau dans le tube est le même que celui dans le réservoir.
- h est minimale (valeur négative) lorsque $\theta = 180°$: c'est le cas d'un liquide parfaitement non-mouillant. Le cas $h < 0$ ($90° < \theta < 180°$) correspond par exemple au mercure (voir Figure 2.7b).

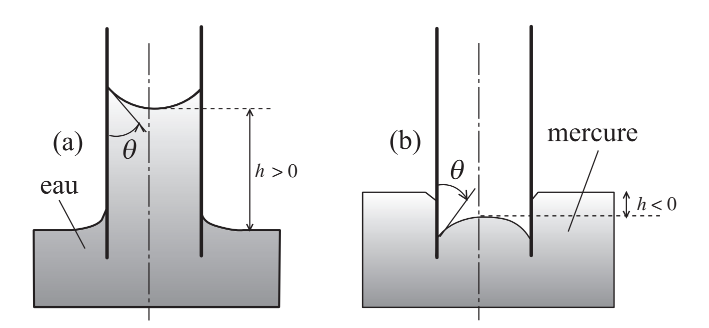


Figure 2.7 – Remontée capillaire : (a) effet mouillant et (b) non-mouillant.

Remarques :

Une lame de rasoir plus dense que l'eau peut flotter dans l'eau grâce à la tension de surface de l'eau sur la lame.

Un capillaire en verre bien propre est presque parfaitement mouillant pour l'eau à condition de l'avoir humidifié au préalable.

Les insectes appartenant à la famille des punaises ont des pattes qui sont revêtues d'une substance qui leur permet de marcher sur l'eau.

2.7 Principe d'Archimède

Énoncé du principe

Dans une situation d'équilibre, tout corps plongé dans un fluide au repos subit une poussée verticale ascendante qui est égale au volume de fluide déplacé.

Considérons un solide de masse volumique ρ_s uniforme, d'aire S et de volume V, et complètement immergé comme cela est représenté sur la Figure 2.8. Nous savons que la résultante des efforts exercés par le fluide sur la surface solide est :

$$\vec{F} = -\iint_S p\vec{n}\,\mathrm{d}S \tag{2.43}$$

Or le théorème du gradient permet de remplacer l'intégrale de surface par l'intégrale de volume :

$$\vec{F} = -\iiint_V \vec{\nabla} p\ \mathrm{d}V \tag{2.44}$$

La relation de l'hydrostatique (2.16) conduit, lorsque la masse volumique est indépendante de l'altitude, à :

$$\vec{\nabla} p = \rho_f\,\vec{g} \tag{2.45}$$

Et donc :

$$\vec{F} = -\iiint_V \rho_f\,\vec{g}\ \mathrm{d}V = -\rho_f\,\vec{g}V = -m_f\,\vec{g} \tag{2.46}$$

La force $\vec{F}$ n'est autre que le poids de la masse m_f d'eau contenue dans le volume V du solide. La force totale exercée sur le corps solide est la somme de la force d'*Archimède* et du poids du solide :

$$\vec{R} = \vec{F} + \iiint_V \rho_s\,\vec{g}\ \mathrm{d}V = \left(\rho_s - \rho_f\right)\vec{g}V \tag{2.47}$$

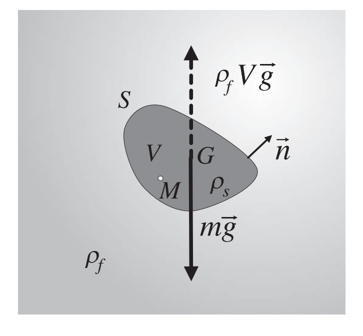


Figure 2.8 – **Application de la poussée d'Archimède sur un corps immergé.**

Le moment, au centre G d'inertie du solide, des efforts de pression, est :

$$\overrightarrow{M_G} = -\iint_S \overrightarrow{GM} \wedge p\vec{n}\,\mathrm{d}S, \quad \forall M \in S \tag{2.48}$$

Par définition du centre d'inertie, on a :

$$\iiint_V \overrightarrow{GM}\,\mathrm{d}V = \vec{0}, \ \forall M \in V \tag{2.49}$$

Nous utilisons la relation du rotationnel pour transformer l'intégrale de surface (2.48) en intégrale de volume :

$$-\iint_S \overrightarrow{GM} \wedge p\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_V \vec{\nabla} \wedge \left(p\overrightarrow{GM}\right)\mathrm{d}V = \iiint_V \vec{\nabla}p \wedge \overrightarrow{GM}\,\mathrm{d}V \tag{2.50}$$

Soit, en utilisant la relation de l'hydrostatique (2.16) et la relation (2.49) :

$$\overrightarrow{M_G} = \rho_f\,\vec{g} \wedge \iiint_V \overrightarrow{GM}\,\mathrm{d}V = \vec{0} \tag{2.51}$$

Cette relation démontre que le centre de poussée coïncide avec le centre de masse du solide et ceci quelle que soit la forme du solide immergé.

Dans le cas d'un solide partiellement immergé dans deux fluides, la démonstration reste simple. Il suffit en effet de reprendre les relations (2.43) à (2.47) en décomposant la surface en 2 surfaces associées chacune au fluide concerné comme cela est représenté sur la Figure 2.9. On note que le point B d'application de la poussée ne correspond plus avec le centre de masse G du solide étant donné que les deux fluides ont des masses volumiques différentes.

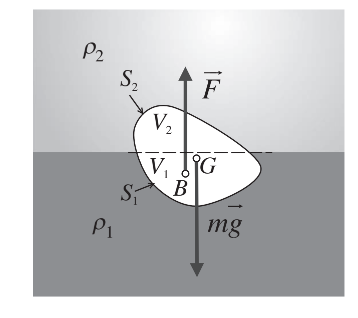


Figure 2.9 – Application de la poussée d'Archimède sur un corps partiellement immergé.

Dès lors la poussée d'*Archimède* s'exprime sous la forme :

$$\vec{F} = -\iiint_{V_1} \rho_1\,\vec{g}\,\mathrm{d}V - \iiint_{V_2} \rho_2\,\vec{g}\,\mathrm{d}V = -\left(\rho_1\,V_1 + \rho_2\,V_2\right)\vec{g} \tag{2.52}$$

Généralisation du principe

Dans une situation d'équilibre, tout corps partiellement immergé entre deux fluides au repos subit une poussée verticale ascendante qui est égale aux volumes des deux fluides déplacés.

Néanmoins la poussée d'*Archimède* sera appliquée au centre de masse du volume de fluide déplacé qui sera donc différent du centre de masse du solide lorsque celui-ci n'est pas complètement immergé. Ceci conduit à définir le métacentre comme le point intersection de la ligne de poussée avec la ligne d'action du poids à l'équilibre. Considérons l'exemple de la carène d'un bateau représentée sur la Figure 2.10. Lorsque le métacentre M, dit dans ce cas de roulis, reste au dessus du point centre de masse G toute variation d'inclinaison de l'objet solide tend à revenir vers la position d'équilibre stable. Lorsque le métacentre est au-dessus de G, l'équilibre est stable et un moment de rétablissement tend à faire revenir la carène à sa position d'équilibre A (cas B). Dans le cas contraire on a un moment de basculement qui va tendre à faire chavirer la carène (cas C).

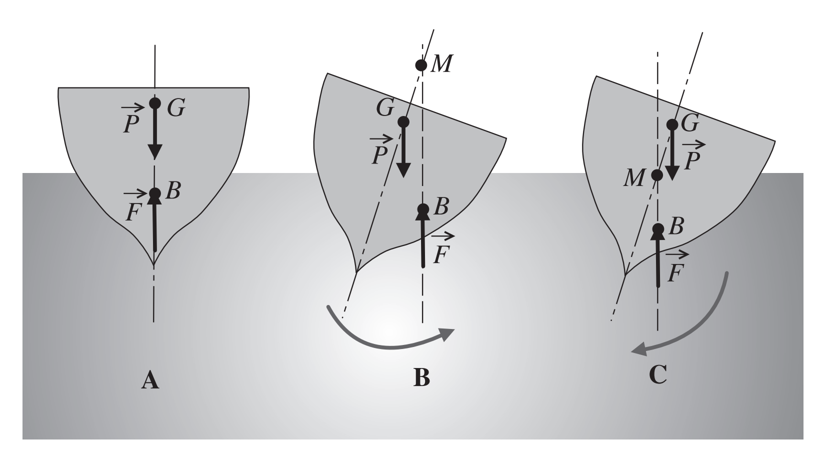


Figure 2.10 – Position du métacentre M de la carène d'un bateau en fonction de l'inclinaison et de la position du centre de poussée B relativement au centre de masse G.

Exercices

2.1 Hydrostatique pour un fluide compressible

Sachant que le coefficient de compressibilité de l'eau est $\chi = 5 \times 10^{-10}\ \mathrm{Pa}^{-1}$, calculer la pression à 300 m de profondeur (la pression à la surface libre est $p_0 = 1{,}013 \times 10^5\ \mathrm{Pa}$, la masse volumique de l'eau est $\rho = 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et l'accélération de la pesanteur est $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$).

2.2 Pression et température dans l'atmosphère

La variation de température et de masse volumique de l'air dans l'atmosphère est représentée en fonction de l'altitude sur la figure ci-dessous.

Calculer la pression dans l'atmosphère à 10 km d'altitude en utilisant diverses lois de variation de la masse volumique en fonction de la température : **1.** fluide parfait, **2.** fluide

parfait compressible et isotherme, **3.** fluide compressible avec variation de la température (la variation de température entre 0 et 10 km est linéaire : $T = -0{,}0065\,z + 273$). Faire une analyse des solutions.

A.N. : la masse volumique de l'air à $z = 0$ ($p = 10^5$ Pa et $T = 293$ K) est $\rho = 1{,}225\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, constante des gaz parfaits pour l'air $r = 287\ \text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

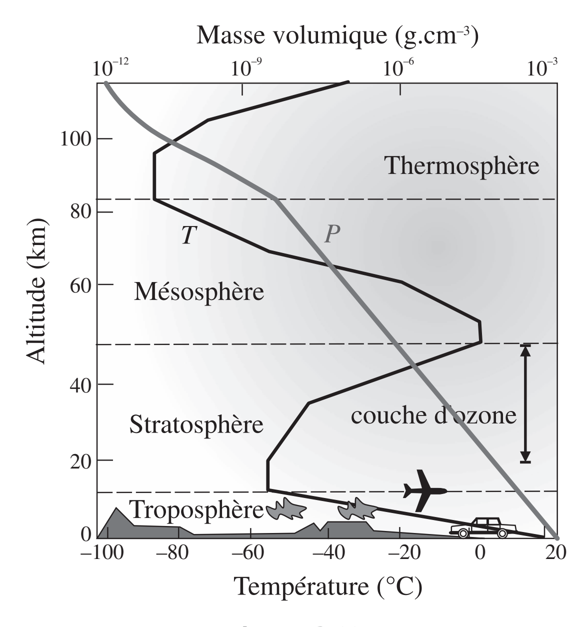


Figure 2.11

2.3 Pression dans des réservoirs

En utilisant les données reportées sur la figure ci-dessous, calculer la différence de pression entre les deux réservoirs.

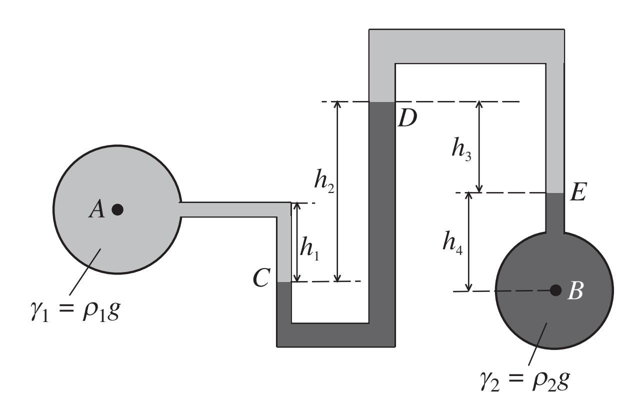


Figure 2.12 – $h_1 = 2$ cm, $h_2 = 8$ cm, $h_3 = 5$ cm, $h_4 = 1$ cm, $\rho_1 = 1{,}225\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\rho_2 = 1\,000\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

2.4 Efforts sur un barrage

On considère un barrage de masse m_b et d'extension L (suivant l'axe y perpendiculaire au plan vertical xz) sur lequel est exercé un effort de poussée par l'eau qu'il contient d'une part ainsi que par de l'eau filtrant sous sa base et dont la répartition est donnée sur la figure ci-dessous.

Donner l'expression du point d'application des efforts de poussée sur le barrage ainsi que l'expression de l'effort résultant exercé sur le barrage.

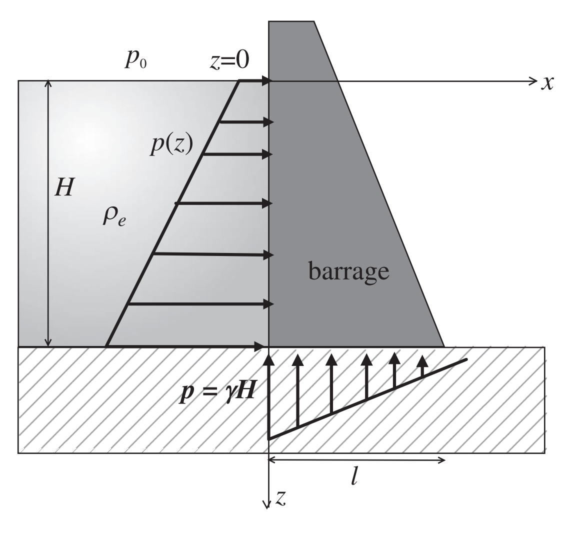


Figure 2.13

2.5 Poussée d'Archimède sur un ballon

On considère un ballon météorologique rempli d'un gaz de masse volumique ρ et placé à une altitude z où son volume est $V(z)$ à l'équilibre thermique correspondant à la température $T(z)$. Le ballon est entouré par de l'air au repos de masse volumique $\rho_a > \rho$. Les deux gaz se comportent comme des fluides parfaits. Donner l'expression de la résultante des efforts exercée sur le ballon. Quelle condition doit-on avoir pour que le ballon soit à l'équilibre ?

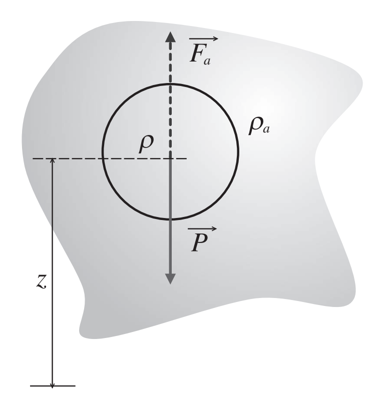


Figure 2.14

Solutions

2.1 Nous utilisons la relation (2.32) qui donne l'expression de la pression en tenant compte de la compressibilité du fluide (attention ici l'axe z est pris en sens opposé, c'est-à-dire orienté vers le bas, et nous trouvons donc un signe différent pour le vecteur associé à l'accélération de la pesanteur) :

$$p = p_0 - \frac{1}{\chi_T}\ln(1 - \chi_T\,\rho_0\,g\,z)$$

Soit :

$$p = 1{,}013 \times 10^5 - \frac{1}{5 \times 10^{-10}}\ln(1 - 5 \times 10^{-10} \times 10^3 \times 9{,}81 \times 300)$$
$$= 30{,}4647 \times 10^5\ \text{Pa} = 30{,}464\ \text{bar}$$

Un calcul ne tenant pas en compte de la compressibilité donnerait :

$$p = p_0 + \rho_0\,g\,z = 30{,}443\ \text{bar}$$

L'eau est donc bien très peu compressible.

2.2

1. Le fluide se comporte comme un gaz parfait de masse volumique constante :

$$p = p_0 - \rho\,g\,z = 10^5 - 1{,}225 \times 9{,}81 \times 10^4 = -20{,}172 \times 10^4\ \text{Pa}$$

2. La relation (2.25) donne :

$$p = p_0 e^{-\frac{g}{rT}z} = 10^5\,e^{-\frac{9{,}81}{287\times 300}\times 10^4} = 32 \times 10^3\ \text{Pa}$$

3. En utilisant la relation des gaz parfaits dans la relation de l'hydrostatique on a :

$$\mathrm{d}p(z) = -\frac{p}{rT}\,g\,\mathrm{d}z$$

Soit :

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{g}{rT}\,\mathrm{d}z$$

En remplaçant la valeur de la température par sa variation en fonction de z :

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{g}{r(-0{,}0065\,z + 273)}\,\mathrm{d}z$$

En intégrant cette relation :

$$\int_{p_0}^{p}\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{g}{r}\int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{-0{,}0065\,z + 273}$$

Ce qui donne :

$$\ln\frac{p}{p_0} = \frac{g}{0{,}0065\,r}\ln\frac{-0{,}0065\,z + 273}{273}$$

Et donc finalement :

$$p = p_0\left(\frac{-0{,}0065\,z + 273}{273}\right)^{\frac{g}{0{,}0065\,r}}$$

La valeur numérique est :

$$p = 10^5\left(\frac{-0{,}0065 \times 10^4 + 273}{273}\right)^{\frac{9{,}81}{0{,}0065\times 287}} = 23{,}93 \times 10^3\ \text{Pa}$$

Si nous utilisons la relation (2.33) pour les fluides polytropiques (solution de référence pour l'atmosphère) :

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{x-1}{x}z\frac{\rho_0\, g}{p_0}\right)^{\frac{x}{x-1}}$$

Avec $x = \gamma = c_p / c_v = 1{,}4$ (cas de la transformation isentropique en considérant que l'air n'est constitué que d'azote), on trouve alors :

$$p = 10^5\left(1 - \frac{1{,}4-1}{1{,}4} \times 10^4 \times \frac{1{,}225 \times 9{,}81}{10^5}\right)^{\frac{1{,}4}{1{,}4-1}} = 22{,}94 \times 10^3\ \text{Pa}$$

L'hypothèse de fluide parfait incompressible conduit à un résultat incohérent démontrant la nécessité de conserver le caractère compressible de l'air. Le cas compressible mais à température uniforme ne conduit pas à un résultat très éloigné de la référence fournie par la dernière relation. On voit cependant que la prise en compte de la variation de température en fonction de l'altitude conduit au résultat le plus près de la mesure expérimentale.

2.3 On applique la relation de l'hydrostatique :

$$p_A - p_C = -\gamma_1 h_1$$
$$p_C - p_D = \gamma_2 h_2$$
$$p_D - p_E = -\gamma_1 h_3$$
$$p_E - p_B = -\gamma_2 h_4$$

En sommant toutes ces relations on trouve :

$$\begin{aligned} p_A - p_B &= -\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_1 h_3 - \gamma_2 h_4 \\ &= \gamma_1(-h_1 - h_3) + \gamma_2(h_2 - h_4) \end{aligned}$$

L'application numérique donne :

$$p_A - p_B = 1{,}225 \times 9{,}81 \times (-7 \times 10^{-2}) + 1000 \times 9{,}81 \times (7 \times 10^{-2}) = 685{,}85\ \text{Pa}$$

2.4 Calculons tout d'abord l'effort résultant de poussée du fluide retenu sur la surface du barrage :

$$\vec{F} = \iint_S p \mathrm{d}S \vec{x} = \int_{y=0}^{L} \int_{z=0}^{H} p \mathrm{d}y \mathrm{d}z \vec{x}$$

En utilisation la relation de l'hydrostatique pour la pression :

$$\vec{F} = L \int_{z=0}^{H} (p_0 + \rho g z) \mathrm{d}z \vec{x} = L\left(p_0 + \rho g z \frac{H}{2}\right) H \vec{x}$$

La résultante des efforts de pression sur la base est :

$$\vec{F_b} = -\iint_S p \mathrm{d}S \vec{z} = -L \int_{x=0}^{l} p \mathrm{d}x \vec{z} = -L \int_{x=0}^{l} \frac{\gamma H}{l}(l - x) \mathrm{d}x \vec{z}$$

Soit :

$$\vec{F_b} = -L \frac{\gamma H l}{2} \vec{z}$$

Le point d'application P de la résultante $\vec{F}$ est tel que :

$$\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge p \mathrm{d}S \vec{x} = \int_{y=0}^{L} \int_{z=0}^{H} z p \mathrm{d}y \mathrm{d}z \vec{z} \wedge \vec{x}$$

Soit :

$$\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = L \int_{z=0}^{H} z p \mathrm{d}z \vec{y} = L \int_{z=0}^{H} z(p_0 + \rho g z) \mathrm{d}z \vec{y} = L H^2 \left(\frac{p_0}{2} + \rho g \frac{H}{3}\right) \vec{y}$$

Comme d'autre part :

$$\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = L \int_{z=0}^{H} z p \mathrm{d}z \vec{y} = z_P F \vec{y} = z_P L\left(p_0 + \rho g z \frac{H}{2}\right) H \vec{y}$$

On en déduit :

$$z_P L\left(p_0 + \rho g \frac{H}{2}\right) H \vec{y} = L H^2 \left(p_0 \frac{1}{2} + \rho g \frac{H}{3}\right) \vec{y}$$

Soit :

$$z_P = \frac{H\left(\frac{p_0}{2} + \rho g \frac{H}{3}\right)}{\left(p_0 + \rho g \frac{H}{2}\right)}$$

En effectuant le même calcul pour le point d'application P_b de la résultante $\vec{F}_b$ est :

$$x_{P_b} = \frac{l}{3}$$

On trouve ainsi que la résultante des efforts exercée sur le barrage est :

$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{F_b} + m_b\,\vec{g}$$

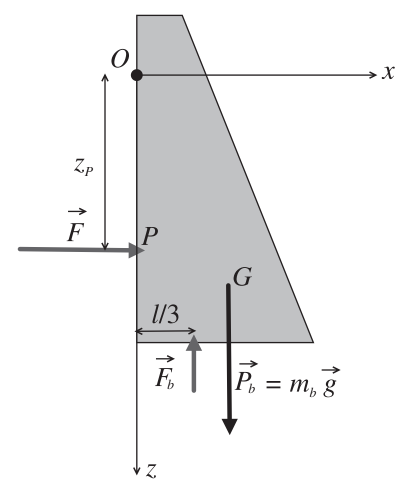


Figure 2.15

Signalons que le point G d'application du poids est donné par :

$$m_b\overrightarrow{OG} = \iiint_V \overrightarrow{OM}\,\mathrm{d}m$$

2.5 Le ballon est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la poussée d'Archimède $\vec{F_a}$:

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{F_a}$$

Le module du poids à l'altitude z est :

$$P = \rho V(z) g$$

La poussée d'Archimède est égale au poids de volume de fluide déplacé soit :

$$F_a = \rho_a V(z) g$$

où ρ et ρ_a sont les masses volumiques pour le gaz dans le ballon et l'air extérieur respectivement.
En projection sur l'axe z ascendant la résultante est donc :

$$R = \rho_a V(z) g - \rho V(z) g = (\rho_a - \rho) V(z) g$$

Le ballon sera à l'équilibre lorsque les forces de pression exercées sur la face interne du ballon égalisent celles exercées sur la face externe, soit en utilisant la relation des gaz parfaits :

$$\rho r T(z) = \rho_a r_a T(z)$$

Ceci conduit à :

$$\rho r = \rho_a r_a$$

Remarque : à haute altitude la relation précédente n'est plus valable comme nous avons pu le constater à l'exercice 2.2. Il sera préférable d'utiliser la relation (2.33) pour les gaz polytropiques (avec $x = \gamma$ pour une transformation isentropique) qui conduit à :

$$\left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} z \frac{\rho_0 \, g}{p_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \left(1 - \frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a} z \frac{\rho_0 \, g}{p_0}\right)^{\frac{\gamma_a}{\gamma_a - 1}}$$

où γ et γ_a sont les rapports des chaleurs massiques pour le gaz et l'air respectivement.

Bibliographie

COMOLET R., *Mécanique expérimentale des fluides*, *Statique et dynamique des fluides non visqueux*, tome 1, DUNOD, Paris, 2002.

DESJARDINS D., COMBARNOUS M., BONNETON N., *Mécanique des fluides-Problèmes résolus avec rappels de cours*, DUNOD, Paris, 2002.

MONAVON A., *Mini manuel de Mécanique des fluides*, DUNOD, Paris, 2010.

MUNSON B. R., YOUNG D.F., OKIISHI T. H., *Fundamentals of Fluid Mechanics*, John Wiley & Son, 2002.

OUZIAUX R., PERRIER J., *Mécanique des fluides appliquée*, DUNOD, Paris, 1998.

POTTER M. AND WIGGERT D.C., Fluid mechanics, *SCHAUM'S Outline Series*, McGRAW-HILL, New York, 2008.

CINÉMATIQUE DES FLUIDES

3

PLAN

OBJECTIFS

- Mouvements lagrangien et eulérien
- Tenseur de déformation
- Fonction de courant et potentiel des vitesses
- Écoulements à fonction complexe

3.1 INTRODUCTION

La *cinématique* d'un milieu matériel repose sur la notion d'espace et de temps. Elle correspond à une branche de la mécanique des fluides qui décrit le mouvement du fluide et ses conséquences sans considération de la nature des forces provoquant le mouvement. Habituellement, la vitesse décrit l'écoulement. En d'autres termes, un champ d'écoulement est spécifié par des vitesses en différents points dans la région et à différents instants. Une masse de fluide peut être conçue comme un ensemble de particules fluides. La vitesse instantanée en chaque point dans une région fluide est en fait la vitesse de chaque particule qui existe en ce point et à cet instant. Afin d'obtenir une image complète de l'écoulement, le mouvement du fluide est décrit par deux méthodes qui sont discutées ci-après.

3.1.1 Méthode lagrangienne (Joseph Louis Lagrange, 1736-1813)

Elle consiste à suivre chaque particule matérielle prise individuellement dans son mouvement au cours du temps.

Soit $\vec{S}(\vec{S_0}, t)$ le vecteur position d'une particule donnée et $\vec{S_0}$ est sa position initiale au temps initial t_0. En coordonnées cartésiennes : $\vec{S} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ qui s'écrit aussi :

$$\begin{cases} x = x(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t) \\ y = y(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t) \\ z = z(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t) \end{cases} \tag{3.1}$$

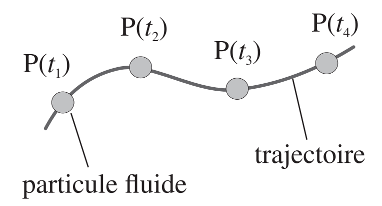


Figure 3.1 – **Trajectoire de la particule P.**

où $x_0,\ y_0,\ z_0$ sont les coordonnées initiales et x, y, z les coordonnées au temps t de la particule.

La vitesse $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ en $\vec{S_0}$ peut être calculée par :

$$\vec{u} = \left[\frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t}\right]_{\vec{S_0}} = \left\{u_x = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{x_0,\ y_0,\ z_0} ; u_y = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_{x_0,\ y_0,\ z_0} ; u_z = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)_{x_0,\ y_0,\ z_0}\right\} \tag{3.2}$$

L'accélération en $\vec{S_0}$ est :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \left[\frac{\mathrm{d}^2\vec{S}}{\mathrm{d}t^2}\right]_{\vec{S_0}} \\ &= \left\{a_x = \left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)_{x_0,\ y_0,\ z_0} ;\ a_y = \left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)_{x_0,\ y_0,\ z_0} ;\ a_z = \left(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right)_{x_0,\ y_0,\ z_0}\right\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Les avantages de la *représentation lagrangienne* sont :

- la trajectoire de chaque particule fluide est connue, son histoire peut être tracée ;
- la conservation de la masse est satisfaite.

Les inconvénients de cette représentation sont liés au fait que les fluides sont composés d'un très grand nombre de particules. Les interactions entre les particules sont donc difficiles à décrire. La méthode lagrangienne n'est donc pas pratique pour des applications réelles mais elle peut être utilisée pour les sprays, la dynamique des bulles et des particules ou les gaz raréfiés par exemple.

3.1.2 Méthode eulérienne (Leonhard Euler, 1707-1783)

Elle consiste à établir à un instant t donné l'ensemble des vitesses associées à chaque point de l'espace occupé par le fluide. La représentation mathématique de la méthode eulérienne s'écrit pour la vitesse : $\vec{u}(\vec{S},\ t)$ où $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$ et $\vec{S} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

. Par ailleurs les composantes du champ de vitesse s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} u_x = u_x(x,\ y,\ z,t) \\ u_y = u_y(x,\ y,\ z,t) \\ u_z = u_z(x,\ y,\ z,t) \end{cases} \tag{3.4}$$

3.1.3 Relation entre la méthode eulérienne et lagrangienne

La *méthode d'Euler* permet d'exprimer la vitesse comme :

$$\vec{u}(\vec{S},\ t) = \frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{dt}} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u_x(x,\ y,\ z,t) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = u_y(x,\ y,\ z,t) \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = u_z(x,\ y,\ z,t) \end{cases} \tag{3.5}$$

Si on intègre le système d'équations ci-dessus, on aboutit à des constantes d'intégration qui doivent être trouvées à partir des conditions initiales. La solution donne alors les équations de *Lagrange* : $\vec{S}(\vec{S_0},\ t)$ et on retrouve le système d'équations (3.1). En principe la méthode lagrangienne peut donc être déduite de l'approche eulérienne.

3.2 Dérivée particulaire et accélération

Soit la forme eulérienne de la vitesse (voir relation (3.5)). Après un instant Δt, les coordonnées et les vitesses subissent les changements $(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)$ et $(u_x + \Delta u_x,\ u_y + \Delta u_y,\ u_z + \Delta u_z)$ respectivement. En développant en série de Taylor, on a :

$$\begin{cases} \Delta u_x = \dfrac{\partial u_x}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u_x}{\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial u_x}{\partial z}\Delta z + \dfrac{\partial u_x}{\partial t}\Delta t + \mathrm{O}(\Delta x,\ \Delta y, \Delta z,\ \Delta t) \\ \Delta u_y = \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u_y}{\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial u_y}{\partial z}\Delta z + \dfrac{\partial u_y}{\partial t}\Delta t + \mathrm{O}(\Delta x,\ \Delta y, \Delta z,\ \Delta t) \\ \Delta u_z = \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u_z}{\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial u_z}{\partial z}\Delta z + \dfrac{\partial u_z}{\partial t}\Delta t + \mathrm{O}(\Delta x,\ \Delta y, \Delta z,\ \Delta t) \end{cases} \tag{3.6}$$

Par conséquent, comme $\Delta x = u_x\,\Delta t$, $\Delta y = u_y\,\Delta t$, $\Delta z = u_z\,\Delta t$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta u_x}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_x}{\partial z} = a_x \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta u_y}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_y}{\partial z} = a_y \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta u_z}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = a_z \end{cases} \tag{3.7}$$

ou :

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}_{\text{dérivée particulaire}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{\text{dérivée temporelle}} \underbrace{+ u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}}_{\text{dérivée convective}} \tag{3.8}$$

On peut résumer ainsi le type découlement qu'on obtient en fonction de l'existence ou non des accélérations temporelle et convective :

Tableau 3.1

Type d'écoulement	**Accélération temporelle**	**Accélération convective**
uniforme et stationnaire	0	0
non-uniforme et stationnaire	0	$\neq 0$
instationnaire et uniforme	$\neq 0$	0
instationnaire et non-uniforme	$\neq 0$	$\neq 0$

3.3 Lignes de courant, trajectoires et lignes d'émission

3.3.1 Lignes de courant

Pour un instant fixé, lorsqu'une ligne est tracée de façon à ce que le vecteur vitesse soit tangent à cette ligne, en chacun de ses points, alors cette courbe est appelée ligne de courant.

Soit $\overrightarrow{\mathrm{d}s}$ un segment de courbe infinitésimal, le vecteur vitesse $\vec{u}$ est porté par ce segment (voir Figure 3.2). Ces deux vecteurs sont colinéaires, ce qui permet d'écrire en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{u} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}s} = \vec{0} = \left| \begin{array}{l} u_y\,\mathrm{d}z - u_z\,\mathrm{d}y \\ u_z\,\mathrm{d}x - u_x\,\mathrm{d}z \\ u_x\,\mathrm{d}y - u_y\,\mathrm{d}x \end{array} \right.$$

Figure 3.2 – **Illustration de lignes de courant à un instant donné pour un fluide s'écoulant autour d'un solide.**

Et par conséquent :
$$\frac{\mathrm{d}x}{u_x(x,y,z,t)} = \frac{\mathrm{d}y}{u_y(x,y,z,t)} = \frac{\mathrm{d}z}{u_z(x,y,z,t)} \tag{3.9}$$

L'équation (3.9) constitue l'équation des *lignes de courant* et où le temps « t » est fixé. On appelle *tube de courant* l'ensemble des lignes de courant s'appuyant au même instant sur un contour fermé quelconque. Un tube de courant est défini de telle sorte qu'il n'y ait pas d'intersection entre les lignes de courant (voir Figure 3.3) :

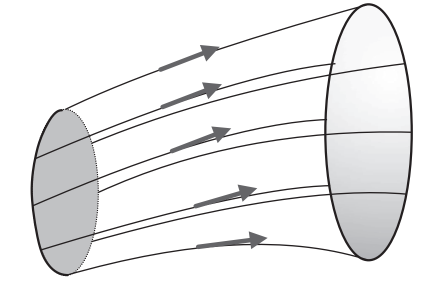


Figure 3.3 – **Tube de courant.**

3.3.2 Trajectoires

On appelle *trajectoire* la courbe décrite au cours du temps par une particule fluide quelconque du champ de l'écoulement.

En comparaison avec les lignes de courant et comme l'illustre la Figure 3.4, il apparaît que la ligne de courant est relative à un même instant mais regroupe des particules différentes alors que la trajectoire, qui réfère à une même particule, est une courbe paramétrée en temps. Les équations paramétriques différentielles des trajectoires sont définies par :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u_x(x,\ y,z,t) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = u_y(x,\ y,z,t) \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = u_z(x,\ y,z,t) \end{cases} \tag{3.10}$$

Le temps est devenu la variable de parcours de la trajectoire. En conséquence, pour un régime permanent, ligne de courant et trajectoire qui ont un point commun sont confondues puisque l'équation différentielle de la ligne de courant devient alors :

$$\frac{dx_i}{d\alpha} = u_i(x, y, z, \alpha), \quad i = (1, 2, 3)$$

On retrouve bien ainsi l'équation d'une trajectoire, à la dénomination près sur le paramètre (α au lieu de t) lequel a perdu toute connotation temporelle en régime permanent.

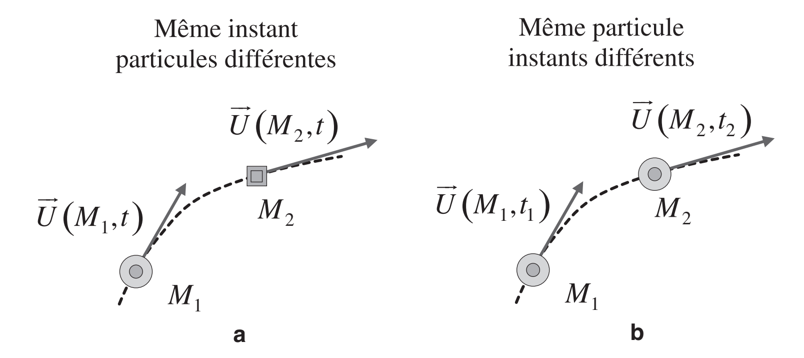


Figure 3.4 – **Comparaisons des (a) lignes de courant et (b) trajectoires.**

3.3.3 Lignes d'émission

On appelle *ligne d'émission* le lieu géométrique, à un instant t, des particules qui sont toutes passées, à différents moments précédent l'instant t, par un même point fixe A de l'écoulement.

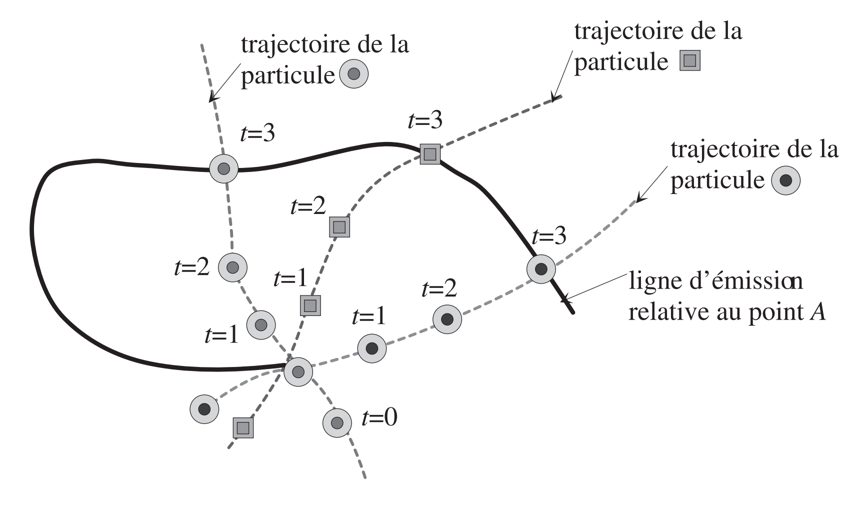


Figure 3.5 – **Trajectoires et lignes d'émission.**

Comme l'illustre la Figure 3.5, et en conséquence directe de la définition, la ligne d'émission est une courbe variable dans le temps et regroupe des particules différentes. En intégrant les équations (3.10) sous la condition que la particule de la ligne d'émission relative au point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ se trouve en ce point pour $t = \tau$, on obtient :

$$\begin{cases} x = x(x_0,\ y_0, z_0, t, \tau) \\ y = y(x_0,\ y_0, z_0, t, \tau) \\ z = z(x_0,\ y_0, z_0, t, \tau) \end{cases} \tag{3.11}$$

Ainsi, lorsque t est fixe et que τ décrit l'intervalle $[0, +\infty]$, les équations précédentes sont celles de la ligne d'émission relative au point M_0 à l'instant t. En revanche, lorsque τ est fixe, ces mêmes équations redonnent, pour t variant, celles de la trajectoire de la particule qui, à l'instant τ, se trouvait au point d'émission M_0.

3.4 Translation, rotation et déformation

3.4.1 Écoulement uniforme

En l'absence de déformation et de rotation, l'écoulement est qualifié d'uniforme. Ce mouvement correspond à un mouvement de *translation* solide. Il est représenté sur la Figure 3.6.

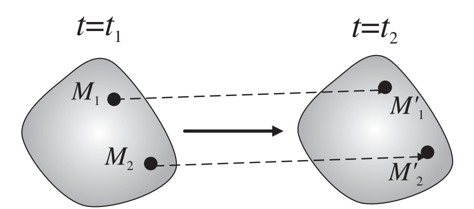


Figure 3.6 – Écoulement uniforme (sans déformation et sans rotation).

Le mouvement de rotation pure s'effectue sans déformation et est donc comparable à de la rotation solide somme représenté sur la Figure 3.7.

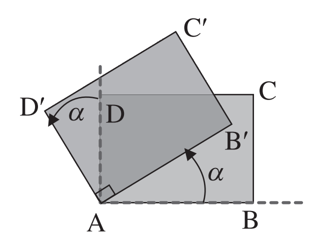


Figure 3.7 – Mouvement de rotation d'un volume de fluide sans déformation.

3.4.2 Translation avec déformations linéaires

On considère la déformation d'un élément rectangulaire (voir la Figure 3.8), ce qui nous permettra d'utiliser les coordonnées cartésiennes. Le déplacement du point B par rapport au point A dans la direction x et par unité de temps s'écrit : $(\partial u_x/\partial x)\ \Delta x$ et celui de D par rapport à A : $(\partial u_x/\partial y)\ \Delta y$. On définit les *vitesses de déformation* linéaire dans les directions x, y et z dans le cas de la déformation d'un élément tridimensionnel comme :

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right),\ \dot{\varepsilon}_{yy} = \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right),\ \dot{\varepsilon}_{zz} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)$$

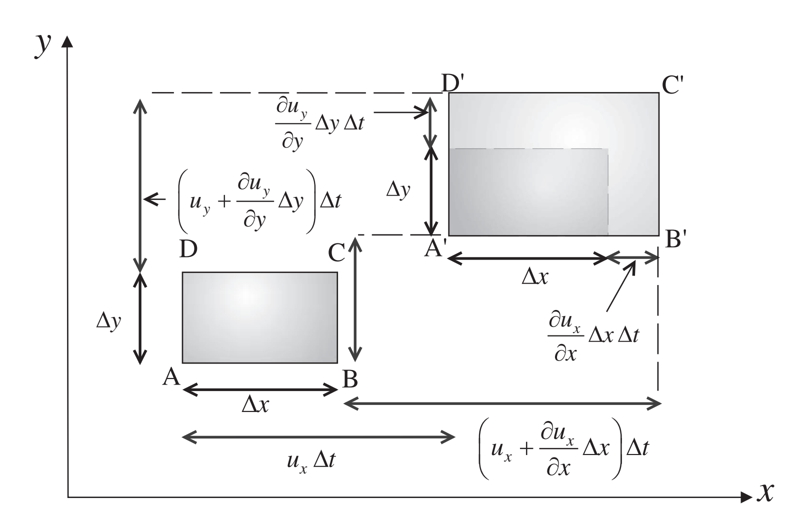


Figure 3.8 – **Écoulement avec déformations linéaires (présentation 2D).**

Remarque :

La déformation volumétrique est nulle dans le cas où le fluide est *incompressible*. En effet au premier ordre et pour un fluide incompressible :

$$\begin{aligned}\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} &= \frac{1}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\,\Delta z + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x\,\Delta z + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\Delta z\right)\Delta x\,\Delta y\right] \\ &= \dot{\varepsilon}_{xx} + \dot{\varepsilon}_{yy} + \dot{\varepsilon}_{zz} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0\end{aligned} \qquad (3.12)$$

3.4.3 Vitesse de déformation quelconque d'un élément fluide

Comme précédemment, on considère la déformation quelconque d'un élément rectangulaire (voir Figure 3.9). Le *taux de déformation* angulaire est défini comme le taux de changement d'angle entre les segments linéaires AB et AD (initialement perpendiculaires entre eux).

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}\right) \tag{3.13}$$

Figure 3.9 – Déformation quelconque d'un élément fluide.

Or d'après la Figure 3.9 :

$$\begin{cases} \mathrm{d}\alpha = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left[\dfrac{\dfrac{\partial u_y}{\partial x}\ \Delta x\ \Delta t}{\Delta x\left(1 + \dfrac{\partial u_x}{\partial x}\ \Delta t\right)}\right] \cong \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\mathrm{d}t \\[2ex] \mathrm{d}\beta = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left[\dfrac{\dfrac{\partial u_x}{\partial y}\ \Delta y\ \Delta t}{\Delta y\left(1 + \dfrac{\partial u_y}{\partial y}\ \Delta t\right)}\right] \cong \dfrac{\partial u_x}{\partial y}\mathrm{d}t \end{cases} \tag{3.14}$$

D'où d'après l'équation (3.13) :

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) \tag{3.15}$$

Avec le même principe, on peut déterminer $\dot{\varepsilon}_{xz}$ et $\dot{\varepsilon}_{yz}$ et on montre facilement (d'après l'équation (3.15)) que $\dot{\varepsilon}_{xy} = \dot{\varepsilon}_{yx}$. On peut ainsi combiner la vitesse de déformation linéaire et celle de cisaillement dans un tenseur d'ordre 2 symétrique appelé tenseur des taux de déformation ($\bar{\bar{\dot{\varepsilon}}}$) :

$$\bar{\bar{\dot{\varepsilon}}}_{ij} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} & \dot{\varepsilon}_{xy} & \dot{\varepsilon}_{xz} \\ \dot{\varepsilon}_{yx} & \dot{\varepsilon}_{yy} & \dot{\varepsilon}_{yz} \\ \dot{\varepsilon}_{zx} & \dot{\varepsilon}_{zy} & \dot{\varepsilon}_{zz} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial u_y}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial z}\right) & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

L'expression simplifiée du *tenseur de vitesse de déformation* s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (3.17)$$

3.4.4 Tenseur de rotation – Vecteur tourbillon

D'après la Figure 3.9, les vitesses angulaires de AB et AD autour de A' sont : $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}t$. La rotation autour de A par rapport à l'axe porté par z est :

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

Avec la méthodologie utilisée pour déterminer le tenseur des taux de déformation, on peut alors par analogie définir le tenseur de taux de rotation R_{ij} (ou $\bar{\bar{R}}$) :

$$R_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (3.18)$$

On peut montrer que le tenseur du gradient de vitesse est la somme du tenseur du taux de déformation et du tenseur de taux de rotation :

$$\bar{\bar{\nabla}}\vec{u} = \bar{\bar{\dot{\varepsilon}}} + \bar{\bar{R}} \quad (3.19)$$

Le vecteur tourbillon est défini par :

$$\vec{\Omega} = 2\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} \quad (3.20)$$

En coordonnées cartésiennes, le vecteur tourbillon s'écrit :

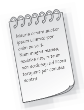
$$\vec{\Omega} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u_z}{\partial y} - \dfrac{\partial u_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_x}{\partial z} - \dfrac{\partial u_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial x} - \dfrac{\partial u_x}{\partial y} \end{array} \right.$$

Et en coordonnées cylindriques (avec $\vec{u}(u_r, u_\theta, u_z)$), on a :

$$\vec{\Omega} = \left| \begin{array}{c} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_r}{\partial z} - \dfrac{\partial u_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right] \end{array} \right. .$$

Par conséquent, l'écoulement est irrotationnel si $\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \vec{\Omega} = \vec{0}$. Les équations des lignes d'isovorticité sont définies par :

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{ds} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\Omega_x} = \frac{\mathrm{d}y}{\Omega_y} = \frac{\mathrm{d}z}{\Omega_z} \tag{3.21}$$



Dans le cas d'une rotation pure dans le plan (xy), on a : $\partial u_y/\partial x = -\partial u_x/\partial y \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{xy} = 0$.

Les composantes ω_k et le tenseur de taux de rotation R_{ij} sont liés par : $\omega_k = -\delta_{ijk} \ R_{ij}$ où δ_{ijk} est le tenseur fondamental alterné vérifiant les relations suivantes :

$$\begin{cases} \delta_{ijk} = +1 \quad \text{si} \quad i, j, k \ \text{sont en permutation directe} \\ \delta_{ijk} = -1 \quad \text{si} \quad i, j, k \ \text{sont en permutation inverse} \\ \delta_{ijk} = 0 \quad \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ll} = \partial u_l/\partial x_l = \vec{\nabla}.\vec{u} = \mathrm{tr}\left(\bar{\bar{\dot{\varepsilon}}}\right)$$

3.5 Fonction de courant – Écoulement incompressible

3.5.1 Définition

On vient de voir que pour un écoulement incompressible : $\vec{\nabla}.\vec{u} = 0$. Si on pose $\vec{u} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$, $\forall \ \vec{A}$ alors $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right) = 0$, $\vec{A}$ est appelé potentiel vecteur. En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \cancel{\dfrac{\partial A_y}{\partial z}} = u_x \\ \cancel{\dfrac{\partial A_x}{\partial z}} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} = u_y \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} = \cancel{u_z} \end{vmatrix}$$

Si on considère un écoulement plan ($\perp$ à l'axe Oz) $\Rightarrow u_z = 0,\ \partial/\partial z = 0$.

D'où : $u_x = \partial A_z/\partial y$ et $u_y = -\partial A_z/\partial x$. On pose alors : $A_z(x, y) = \psi(x, y)$, la fonction ψ est appelée fonction de courant. Par conséquent :

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ u_y = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \tag{3.22}$$

est le champ de vitesse en coordonnées cartésiennes et en coordonnées cylindriques, ce champ des vitesses s'écrit :

$$\begin{cases} u_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ u_\theta = -\dfrac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases}.$$

3.5.2 Propriétés

Comme :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \text{ et } u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y},\ u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Alors :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}$$

Cette relation constitue le théorème de *Schwartz*. Et donc $d\psi$ est une différentielle totale exacte :

$$\mathrm{d}\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \psi}{\partial y}\mathrm{d}y$$

Par conséquent :

$$\int_A^B \mathrm{d}\psi = \psi_B - \psi_A, \text{ quel que soit le chemin suivi entre } A \text{ et } B.$$

Les lignes de courant sont telles que $\mathrm{d}\psi = 0$ (voir Figure 3.10) Donc :

$$\mathrm{d}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\mathrm{d}y = -u_y\,\mathrm{d}x + u_x\,\mathrm{d}y = 0 \qquad (3.23)$$

Soit :

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}_{\substack{\text{pente de la courbe}\\ y=f(x)}} = \underbrace{\frac{u_y}{u_x}}_{\substack{\text{pente du vecteur}\\ \text{vitesse } \vec{u}}} \qquad (3.24)$$

On retrouve bien la relation (3.9).

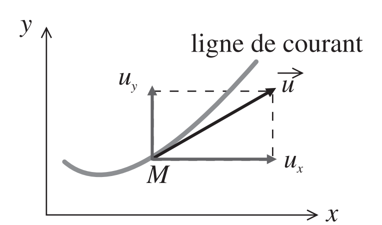


Figure 3.10 – Représentation qualitative de la ligne de courant dans le plan (x,y).

3.6 Écoulement irrotationnel – Potentiel des vitesses

On rappelle que pour un écoulement irrotationnel : $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \vec{0}$. Or d'un point de vue mathématique $\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla}\phi\right) = \vec{0},\ \forall\phi$.

On peut donc poser : $\vec{u} = \vec{\nabla}\phi$, ϕ est appelé potentiel des vitesses. Dans le repère cartésien et en considérant un écoulement plan, on peut donc écrire que :

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{\partial\phi}{\partial x} \\[2mm] u_y = \dfrac{\partial\phi}{\partial y} \end{cases} \qquad (3.25)$$

Si de plus le fluide est incompressible :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \Delta\phi = 0$$

ϕ vérifie l'équation de *Laplace*. De plus, la propriété de l'écoulement irrotationnel pour un écoulement plan entraîne :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \vec{0} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z = 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} u_x = \partial\psi/\partial y \\ u_y = -\partial\psi/\partial x \\ u_z = 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\partial^2\psi/\partial x^2 - \partial^2\psi/\partial y^2 = 0 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \Delta\psi = 0$, ψ vérifie aussi l'équation de *Laplace*.

Les équipotentielles s'obtiennent en prenant : $\phi = C^{te}$ ou $\mathrm{d}\phi = 0$ (voir Figure 3.11). Par conséquent :

$$\mathrm{d}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathrm{d}y = u_x\mathrm{d}x + u_y\mathrm{d}y = 0$$

Donc :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{u_x}{u_y}} \tag{3.26}$$

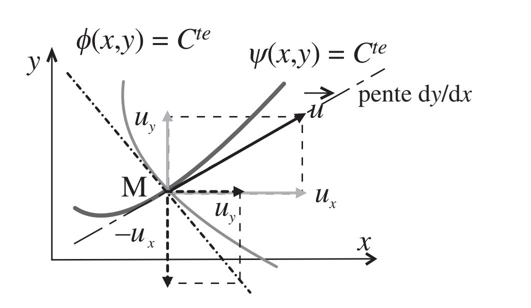


Figure 3.11 – **Représentation qualitative de la ligne de courant et de l'équipotentielle dans le plan (x,y).**

Élément d'arc le long d'une ligne de courant

On souhaite calculer l'arc *ds* sur la ligne de courant ($\psi(x, y) = C^{te}$).

On a : $\mathrm{d}s_{\psi=cte} = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$.

Or :

$$\mathrm{d}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathrm{d}y = u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y$$

De plus, le long de la ligne on a $\psi(x, y) = C^{te}$, soit : $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = u_y/u_x$. Donc :

$$\mathrm{d}\phi = u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\frac{u_y}{u_x}\mathrm{d}x = \frac{u_x^2 + u_y^2}{u_x}\mathrm{d}x = \frac{u_x^2 + u_y^2}{u_y}\mathrm{d}y \tag{3.27}$$

D'où $\begin{cases} \mathrm{d}y = \dfrac{u_y}{u_x^2 + u_y^2}\mathrm{d}\phi \\ \mathrm{d}x = \dfrac{u_x}{u_x^2 + u_y^2}\mathrm{d}\phi \end{cases} \Rightarrow \mathrm{d}s_{\psi=cte} = \sqrt{\dfrac{u_x^2 + u_y^2}{\left(u_x^2 + u_y^2\right)^2}\mathrm{d}\phi^2} = \dfrac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}$

Par conséquent : $ds_{\psi=cte} = d\phi/U$, la distance entre deux équipotentielles est inversement proportionnelle à la vitesse de l'écoulement (voir Figure 3.12).

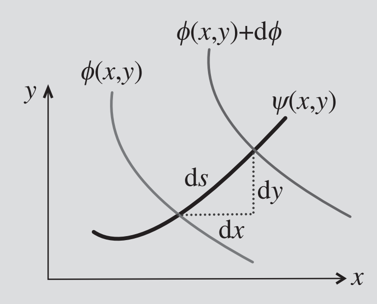


Figure 3.12 – **Représentation de l'arc ds dans le plan (x,y).**

3.7 Représentation d'écoulements par des fonctions complexes

Un grand nombre d'écoulements plans classiques peuvent être représentés par des fonctions complexes. Soit $f(z) = \phi(x,y) + i\ \psi(x,y)$ où $z = x + i\ y$ est la variable complexe associée à la fonction potentiel complexe $f(z)$ (ϕ et ψ représentent respectivement les fonctions potentielle et de courant). Pour que cette fonction $f(z)$ soit analytique, il faut que sa dérivée soit définie partout, c'est-à-dire que $\lim\limits_{\Delta z\to 0}(\Delta f/\Delta z)$ tend vers une même valeur quelle que soit la façon dont $\Delta z \to 0$ ($\Delta x \to 0,\ \Delta y = 0$ ou $\Delta x = 0,\ \Delta y \to 0$) :

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} = \underbrace{\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta\phi + i\Delta\psi}{\Delta x + i\cancel{\Delta y}}}_{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta\phi}{\Delta x}+i\frac{\Delta\psi}{\Delta x}\right) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}} = \underbrace{\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x=0}}\frac{\Delta\phi + i\Delta\psi}{\cancel{\Delta x} + i\Delta y}}_{=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\left(-i\frac{\Delta\phi}{\Delta y}+\frac{\Delta\psi}{\Delta y}\right) = \left(-i\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=-i\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{df}{dz}$$

Donc :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = -i\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = \dfrac{\partial\psi}{\partial y} = u_x\\[2mm] \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x} = u_y\end{cases}$$

Ce système d'équations constitue les relations de *Cauchy-Riemann* qui vérifient bien les relations trouvées précédemment.

Conclusion : Pour que $f(z)$ soit analytique, il faut que ϕ et ψ vérifient les relations de Cauchy-Riemann. La fonction $f(z)$ est appelée potentiel complexe des vitesses.

Propriétés :

On a vu que pour qu'un écoulement puisse être décrit au moyen d'une fonction de courant ψ et d'un potentiel des vitesses ϕ , il faut que ces deux fonctions vérifient l'équation de *Laplace* ($\Delta\psi = 0$ et $\Delta\phi = 0$).

Soient deux écoulements tels que :

$$\begin{cases} \Delta\psi_1 = 0 \text{ et } \Delta\phi_1 = 0 \\ \Delta\psi_2 = 0 \text{ et } \Delta\phi_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(z) = \phi_1 + i\ \psi_1 \\ f_2(z) = \phi_2 + i\ \psi_2 \end{cases}$$

Comme l'opérateur laplacien est linéaire, ceci implique que :

$$\begin{cases} \Delta(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2) = \lambda_1\Delta\psi_1 + \lambda_2\Delta\psi_2 \\ \Delta(\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2) = \lambda_1\Delta\phi_1 + \lambda_2\Delta\phi_2 \end{cases}$$

On pose :

$$\begin{cases} \psi = \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 \\ \phi = \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta\psi = 0 \\ \Delta\phi = 0 \end{cases}$$

Et donc : $f(z) = \phi + i\ \psi = \lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z)$, $f(z)$ décrit l'écoulement résultant de la superposition des deux écoulements f_1 et f_2. Par conséquent, on peut donc superposer plusieurs écoulements élémentaires pour créer des écoulements plus complexes et ceci par une simple addition des potentiels complexes correspondants.

3.8 Exemples d'écoulements complexes

3.8.1 Écoulement uniforme

On considère l'écoulement plan modélisé par le potentiel complexe $f(z) = U z$.

On a alors $\phi(x, y) + i\ \psi(x, y) = U(x + iy) = U x + i\ U y$ et donc :

$$\begin{cases} \psi(x, y) = U y \\ \phi(x, y) = U x \end{cases}$$

Les lignes de courant sont telles que : $\psi(x, y) = U y = C^{te}$ soit $y = C^{te}$, $\forall x$. Les lignes de courant sont donc des droites horizontales (voir Figure 3.13).

Les équipotentielles sont telles que : $\phi(x, y) = U x = C^{te}$ soit $x = C^{te}$, $\forall y$. Les équipotentielles sont donc des droites verticales (voir Figure 3.13). Le champ de vitesses est défini par :

$$\vec{U} = \begin{cases} u_x = \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = \dfrac{\partial\psi}{\partial y} = U \\ u_y = \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \end{cases} = U\,\overrightarrow{e_x}$$

La vitesse est uniforme de module U et est dirigée suivant l'axe horizontal du repère cartésien plan (O, $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$).

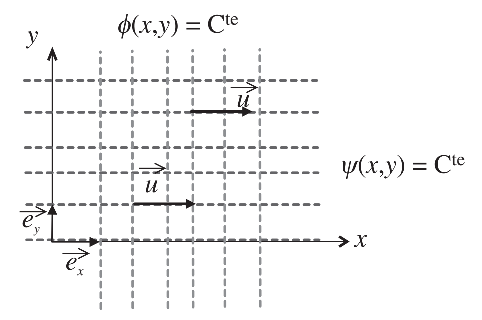


Figure 3.13 – Écoulement uniforme ayant comme potentiel complexe des vitesses f(z) = Uz.

3.8.2 Écoulement plan autour d'une source ou d'un puits

On considère l'écoulement plan modélisé par le potentiel complexe des vitesses : $f(z) = C\ln z$ où $z = x + iy = re^{i\theta}$ et C est une constante réelle. On a alors :

$$f(z) = C\ln\left(re^{i\theta}\right) = C\left(\ln r + i\theta\right)$$

On peut donc en déduire la fonction de courant et le potentiel des vitesses :

$$\begin{cases} \phi(r,\, \theta) = C\ln r \\ \psi(r,\, \theta) = C\theta \end{cases}$$

Les lignes de courant sont telles que $\psi(r,\, \theta) = C\theta = C^{te} \;\Rightarrow\; \theta = C^{te},\ \forall\ r$, ce sont des droites passant par l'origine. De même, les équipotentielles sont telles que $\phi(r,\, \theta) = C\ln r = C^{te} \;\Rightarrow\; r = C^{te},\ \forall\ \theta$, ce sont des cercles concentriques centrés sur l'origine (voir Figure 3.14).

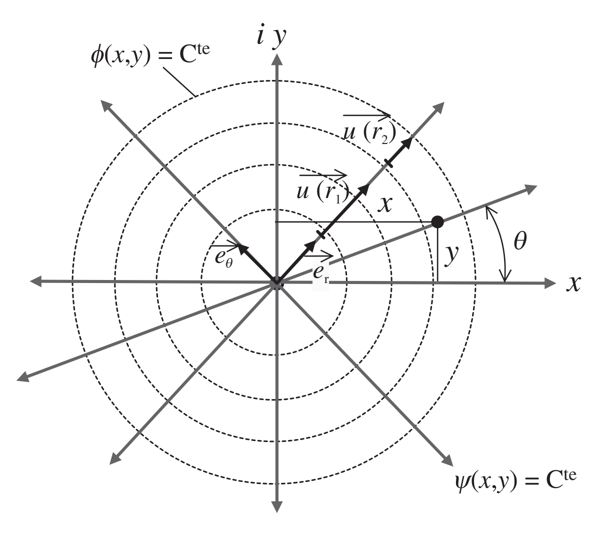


Figure 3.14 – Écoulement uniforme ayant comme potentiel complexe des vitesses $f(z) = C\ln z$ dans le cas C > 0.

On peut alors déterminer le champ de vitesse à partir des expressions du potentiel ou du champ de courant :

$$\vec{u} = \begin{cases} u_r = \dfrac{\partial \phi}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ u_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_r = \dfrac{C}{r} \\ u_\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \dfrac{C}{r}\vec{e_r}$$

où $\vec{e_r}$ est le vecteur unitaire suivant l'axe radial. La vitesse est donc radiale et inversement proportionnelle à la distance à l'origine.

Si $C > 0$ alors l'écoulement est dirigé vers l'extérieur (écoulement divergent) ; la source se trouve à l'origine. Si $C < 0$ alors l'écoulement est dirigé vers l'origine (écoulement convergent) ; le puits est à l'origine.

Signification de la constante *C*

On calcule le débit-volume de cet écoulement radial (source ou puits) :

$$Q_v = \oiint_S \vec{u} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S$$

où S est une surface fermée entourant l'origine, $\vec{u} = (C/r)\vec{e_r}$ et $\vec{n} = \vec{e_r}$. Il s'agit d'un débit-volume linéique dans la direction perpendiculaire au plan xy. L'écoulement se faisant sur un plan, on intègre sur un cercle de rayon r quelconque, centré sur l'origine, on obtient alors :

$$Q_v = \int_0^{2\pi} \frac{C}{r} r \, \mathrm{d}\theta = 2\pi C \Rightarrow C = \frac{Q_v}{2\pi} \Rightarrow f(z) = \frac{Q_v}{2\pi} \ln z$$

$Q_v > 0$ correspond au débit de la source et $Q_v < 0$ au débit du puits.

3.8.3 Vortex ou tourbillon libre

On considère l'écoulement plan modélisé par le potentiel complexe des vitesses :

$$f(z) = -i \; C \ln z$$

$z = x + iy = re^{i\theta}$ et C est une constante réelle. Donc :

$$f(z) = -i \; C \ln\left(re^{i\theta}\right) = C\theta - iC \ln r$$

On peut alors déterminer le champ de vitesse à partir des expressions du potentiel des vitesses ou du champ de courant :

$$\begin{cases} \phi(r, \theta) = C\theta \\ \psi(r, \theta) = -C \ln r \end{cases}$$

Les lignes de courant sont telles que $r = cste$, $\forall\ \theta$, ce sont des cercles concentriques centrés sur l'origine. Les équipotentielles sont telles que $\theta = cste$, $\forall\ r$, ce sont des droites passant par l'origine (voir Figure 3.15).

Le champ de vitesse correspondant s'obtient alors :

$$\vec{u} = \begin{cases} u_r = \dfrac{\partial \phi}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \\ u_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial r} = \dfrac{C}{r} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \frac{C}{r}\overrightarrow{e_\theta}$$

La vitesse est donc orthoradiale et inversement proportionnelle à la distance à l'origine.

Si $C > 0$ alors l'écoulement s'effectue autour de l'origine dans le sens trigonométrique et si $C < 0$ alors l'écoulement s'effectue autour de l'origine dans le sens horaire.

Signification de la constante *C*

Si on considère la circulation autour de l'origine, on a : $\Gamma = \oint_l \vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$ où $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ correspond à un parcours sur une ligne de courant quelconque, donc ici sur le cercle de rayon *r*. Avec $\vec{u} = (C/r)\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = r\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta}$, on obtient finalement :

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} \frac{C}{r} r\,\mathrm{d}\theta = 2\pi C$$

Et par conséquent : $f(z) = -i(\Gamma/2\pi)\ln z$, Γ est la circulation du tourbillon libre. Si $\Gamma > 0$ alors le tourbillon tourne dans le sens trigonométrique et si $\Gamma < 0$ alors il tourne dans le sens horaire.

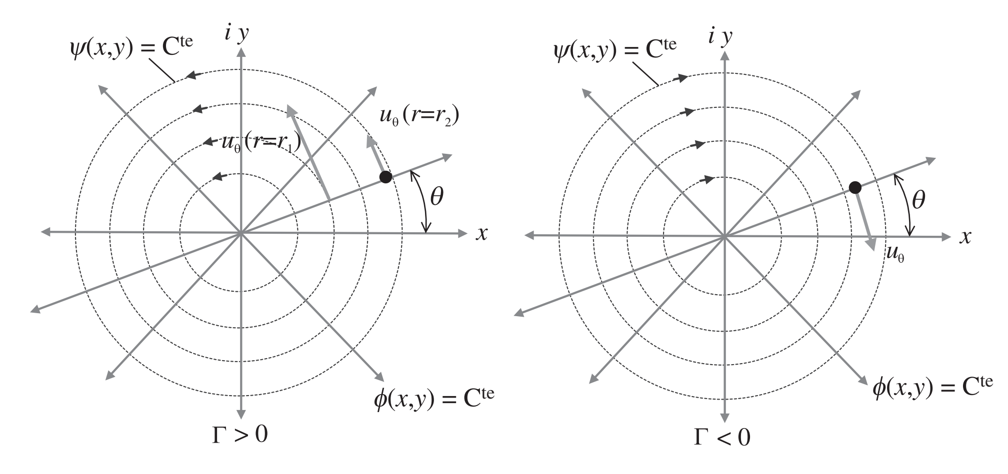


Figure 3.15 – Lignes de courant et équipotentielles pour un écoulement de type vortex.

3.8.4 Association d'une source et d'un puits : doublet et dipôle

On a vu précédemment qu'on peut superposer plusieurs écoulements élémentaires pour former des écoulements plus compliqués. Considérons un puits de débit $-Q_v$ située en $x = a$ auquel on superpose une source de débit Q_v, située en $x = -a$. Le potentiel complexe résultant peut s'écrire :

$$f(z) = \underbrace{-\frac{Q_v}{2\pi}\ln(z-a)}_{\text{puits}} + \underbrace{\frac{Q_v}{2\pi}\ln(z+a)}_{\text{source}}$$

On pose $z_1 = z + a = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = z - a = r_2 e^{i\theta_2}$. On peut donc écrire :

$$f(z) = \frac{Q_v}{2\pi}\left[\ln\frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

On peut alors en déduire la fonction de courant et le potentiel des vitesses :

$$\begin{cases} \phi = \dfrac{Q_v}{2\pi}\ln\dfrac{r_1}{r_2} \\ \psi = \dfrac{Q_v}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) \end{cases}$$

Les lignes de courant sont telles que $(\theta_1 - \theta_2) = C^{te} = \alpha$, ce sont alors des cercles passant par la source et le puits (voir Figure 3.16).

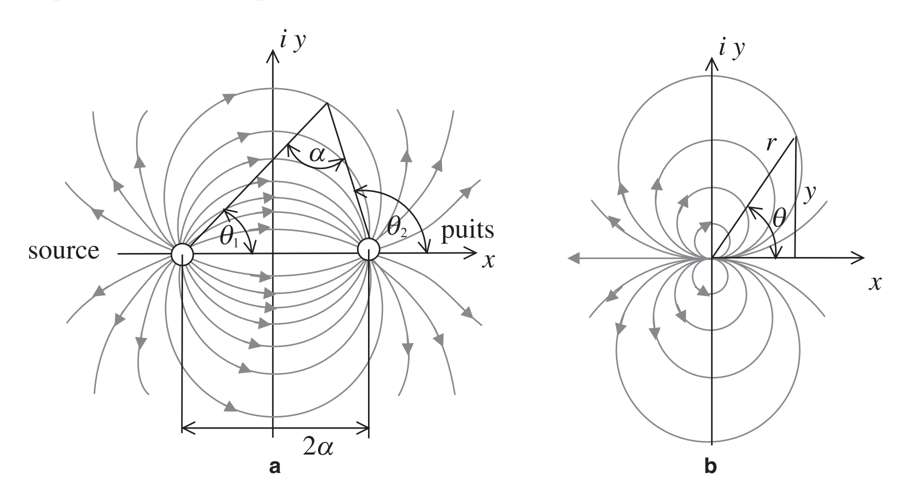


Figure 3.16 – **Lignes de courant (a) pour une source et un puits et (b) un dipôle.**

Si on fait tendre la distance entre la source et le puits vers zéro alors on peut écrire :

$$f(z) = \frac{Q_v}{2\pi}\ln\frac{(z-a)}{(z+a)} = \frac{Q_v}{2\pi}\ln\frac{(1-a/z)}{(1+a/z)}$$

Or $\lim_{a\to 0}\left[1/(1 + a / z)\right] = 1 - a / z$ au 1er ordre et donc :

$$f(z) = \frac{Q_v}{2\pi}\ln\left[(1 - a / z)^2\right] \cong \frac{Q_v}{2\pi}\,2\left(-\frac{a}{z}\right) = -\frac{1}{2\pi}\frac{2aQ_v}{z}$$

En posant $2aQ_v = p$ appelé le moment dipolaire, on obtient finalement :

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi}\frac{p}{z}$$

Avec $z = re^{i\theta}$, on obtient :

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi}\frac{p}{re^{i\theta}} = -\frac{1}{2\pi}\frac{p}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = \phi + i\psi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi = -\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{p}{r}\cos\theta \\ \psi = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{p}{r}\sin\theta \end{cases}$$

Les lignes de courant sont telles que $\psi = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{p}{r}\sin\theta = C^{te}$

D'où en coordonnées cartésiennes $y = C\left(x^2 + y^2\right)$ où C est une constante. Et finalement, l'équation de la ligne de courant se réduit à : $x^2 + (y - K / 2)^2 = (K / 2)^2$, l'équation d'un cercle de centre (*0, K/2*) et de rayon (*K/2*) où *K* est une constante (voir Figure 3.16b).

3.8.5 Écoulement autour d'un cylindre

On a vu dans l'exemple précédent que lorsque la distance entre la source et le puits tend vers zéro alors la forme des iso-lignes de courant tend vers une forme circulaire et qui a été décrit par un doublet (source-puits). On s'attend alors à ce qu'un écoulement uniforme dans la direction (+ *x*) combiné à celui d'un doublet puisse être utilisé afin de représenter un écoulement à travers un cylindre circulaire.

Cette simple superposition de ces fonctions complexes est permise car les fonctions potentielles et les fonctions de courant vérifient l'équation de *Laplace* et le laplacien est linéaire. On peut donc écrire en se référant aux résultats précédents :

$$\begin{cases} \phi = Ux - \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{p}{r}\cos\theta = \left(Ur + \dfrac{C}{r}\right)\cos\theta \\ \psi = Uy + \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{p}{r}\sin\theta = \left(Ur - \dfrac{C}{r}\right)\sin\theta \end{cases}$$

où $C = -p / (2\pi)$ et p est le moment dipolaire défini précédemment. La paroi du cylindre (de rayon *a*) peut être représentée par la ligne de courant $\psi = 0$, ce qui entraîne $C = Ua^2$.

Et par conséquent :

$$\begin{cases} \psi = U r \sin\theta\left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right) \\ \phi = U r \cos\theta\left(1 + \dfrac{a^2}{r^2}\right) \end{cases}$$

Les composantes de vitesse peuvent alors s'écrire :

$$\vec{u} = \begin{cases} u_r = \dfrac{\partial\phi}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta} = U \cos\theta\left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right) \\ u_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\dfrac{\partial\psi}{\partial r} = -U \sin\theta\left(1 + \dfrac{a^2}{r^2}\right) \end{cases}$$

Sur la paroi du cylindre ($r = a$), on a : $\begin{cases} u_r = 0 \\ u_{\theta s} = -2U \sin\theta \end{cases}$

Pour $\theta = \pm\, \pi / 2$, la composante de la vitesse suivante θ est maximale et est égale à deux fois la valeur de la vitesse en amont (parallèle à l'axe, voir Figure 3.17).

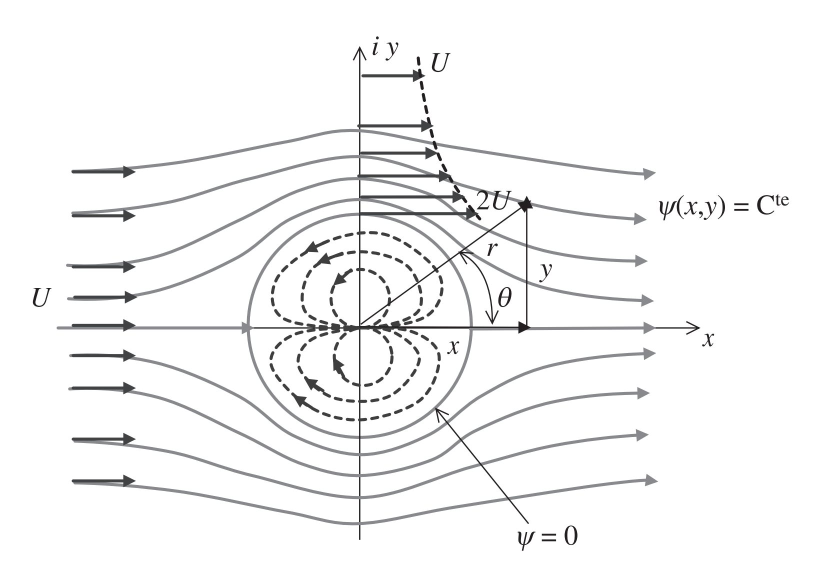


Figure 3.17 – **Lignes de courant autour d'un cylindre.**

On remarque que pour $\theta = \pi/2$ et sur la surface du cylindre on a $|u_{\theta s}| = 2U$. Au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la paroi (et toujours à $\theta = \pi/2$) la vitesse varie en $1/r^2$ et lorsque r devient grand la vitesse tend vers U. On peut déterminer la pression qui s'exerce sur la surface du cylindre en appliquant l'équation de *Bernoulli* (voir Chapitre 4) entre un point amont à pression P_0 et vitesse U et un point sur la surface du cylindre (on rappelle

ici qu'on est dans le cas d'un fluide parfait, on applique alors l'équation de *Bernoulli* sans perte de charge et sur une même altitude fixée, par exemple au centre) :

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 = P_S + \frac{1}{2}\rho V_{\theta s}^2$$

Et donc : $P_S = P_0 + \dfrac{1}{2}\rho U^2(1 - 4\sin^2\theta)$.

3.8.6 Écoulement autour d'un cylindre avec circulation

Comme précédemment, on ajoute les potentiels complexes de l'écoulement autour d'un cylindre et de l'écoulement avec circulation (tourbillon) autour de ce cylindre où les centres des deux écoulements se situent à l'origine du système de coordonnées. On obtient donc le potentiel complexe suivant :

$$f(z) = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z + Ci$$

La constante C est incluse dans cette fonction afin de choisir la fonction de courant telle que $\psi = 0$ lorsque $r = a$ c'est-à-dire que la surface du cylindre est choisie telle que $\psi = 0$ dans la relation finale. Pour déterminer la constante C, on insère $z = re^{i\theta}$ dans l'équation précédente :

$$f(z) = U\left(re^{i\theta} + \frac{a^2}{r}e^{-i\theta}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln re^{i\theta} + Ci$$

Sachant que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, on obtient alors les expressions de ψ et ϕ suivantes :

$$\begin{cases} \phi = U\left(r + \dfrac{a^2}{r}\right)\cos\theta - \dfrac{\Gamma}{2\pi}\theta \\ \psi = U\left(r - \dfrac{a^2}{r}\right)\sin\theta + \dfrac{\Gamma}{2\pi}\ln r + C \end{cases}$$

Pour obtenir $\psi = 0$ pour $r = a$ et pour toutes les valeurs de θ, on doit choisir C tel que : $C = -\dfrac{\Gamma}{2\pi}\ln a$. Par conséquent :

$$f(z) = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln\frac{z}{a} \text{ et } \psi = U\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\frac{r}{a}$$

L'écoulement et les lignes équipotentielles correspondants sont représentés sur la figure 3.18. Les composantes de vitesse peuvent donc être déduites à partir de ces champs :

$$\vec{u} = \begin{cases} u_r = \dfrac{\partial\phi}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta} = U\left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta \\ u_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\dfrac{\partial\psi}{\partial r} = -U\left(1 + \dfrac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta - \dfrac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases}$$

Pour $\Gamma = 0$, on retrouve bien la vitesse de l'écoulement sans circulation (voir Section 3.8.4). La vitesse sur la surface du cylindre peut être obtenue à $r = a$:

$$\begin{cases} u_r = 0 \\ u_\theta = -2U\sin\theta - \dfrac{\Gamma}{2\pi a} \end{cases}$$

La composante u_θ de la vitesse a des valeurs finies sur la surface du cylindre. Cependant, il existe un point, appelé point d'arrêt, sur le cylindre pour lequel $u_\theta = 0$. Pour $\Gamma = 0$, les points d'arrêt sont localisés à $\theta_s = 0$ et $\theta_s = \pi$, c'est-à-dire sur l'axe x. Pour $0 < \Gamma / (4\pi U a) < 1$, θ_s est négatif et les points d'arrêt se situent dans les 3[e] et 4[e] quadrants de la surface du cylindre comme montré sur la Figure 3.18a. Pour $\Gamma/(4\pi U a) = 1$, les points d'arrêt sont localisés au point le plus bas de la surface du cylindre ($\theta_s = -\pi/2$ et $\theta_s = 3\pi/2$, voir Figure 3.18b).

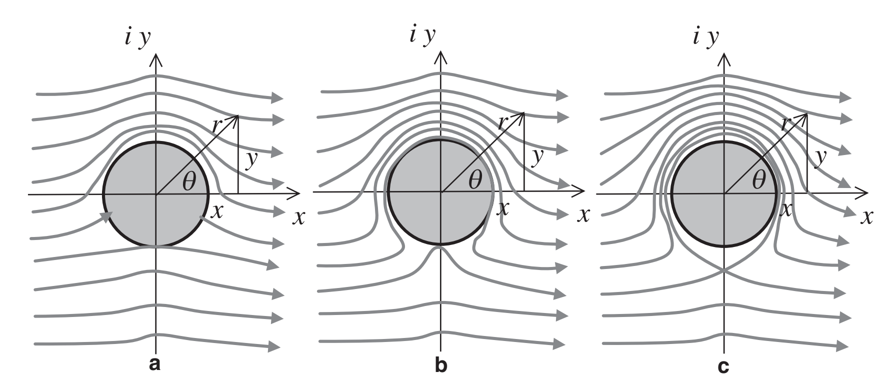


Figure 3.18 – Lignes de courant pour l'écoulement autour d'un cylindre avec circulation.
(a) $0 < \Gamma/(4\pi U_0 a) < 1$, (b) $\Gamma/(4\pi U_0 a) = 1$, (c) $\Gamma/(4\pi U_0 a) > 1$.

Si Γ croît un peu plus tel que $\Gamma > 4\pi U a$ (voir figure 3.18c) alors les points d'arrêt de l'écoulement ne peuvent plus se situer sur la surface du cylindre. Le point d'arrêt ne peut se trouver que dans l'écoulement. La position de ce point ($u_r = 0$, $u_\theta = 0$) peut être déterminée par :

$$\begin{cases} U\left(1 - \dfrac{a^2}{r_s^2}\right)\cos\theta_s = 0 \\ U\left(1 + \dfrac{a^2}{r_s^2}\right)\sin\theta_s = -\dfrac{\Gamma}{2\pi r_s} \end{cases}$$

Comme $r_s \neq a$, c'est-à-dire que la possibilité d'avoir un point d'arrêt sur la surface du cylindre étant exclue, la première des deux équations ci-dessus n'est satisfaite que pour $\theta_s = \pi/2$ et $\theta_s = 3\pi/2$. La deuxième équation donne la coordonnée de la position du

point d'arrêt : $U(1 + a^2/r_s^2) = \pm\Gamma/2\pi r_s$. Mais comme $\Gamma > 0$, et que le terme de gauche de l'équation précédente est positif alors $U(1 + a^2/r_s^2) = \Gamma/2\pi r_s$. On résoud alors l'équation du second ordre en r_s : $r_s^2 - \Gamma r_s/2\pi U + a^2 = 0$ pour obtenir la solution suivante : $r_s^2 = \Gamma/4\pi U \pm \sqrt{(\Gamma/4\pi U)^2 - a^2} = 0$. On a donc les coordonnées exactes du point d'arrêt (le signe '-' de cette solution est exclu puisque le point se trouverait à l'intérieur du cylindre) :

$$\theta_s = 3\pi/2 \text{ et } \frac{r_s}{a} = \frac{\Gamma}{4\pi U a}\left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{4\pi U a}{\Gamma}\right)^2}\right]$$

Le cas $\theta_s = \pi/2$ est exclu pour des raisons de stabilité de l'écoulement.

Exercices

3.1 Vitesse dans le repère lagrangien

Dans un écoulement 1D, la vitesse en un point est donnée dans le système Eulérien par : $u = x + t$. Déterminer le déplacement d'une particule fluide qui a sa position initiale x_0 à l'instant initial t_0 dans le système lagrangien.

3.2 Vitesse, vorticité et vecteur tourbillon

Le champ de vitesse dans un milieu fluide est donné par :

$$\vec{U} = 3xy^2\vec{i} + 2xy\,\vec{j} + (2zy + 3t)\vec{k}$$

Déterminer les amplitudes et directions de (i) la vitesse de translation, (ii) la vitesse rotationnelle et (iii) le vecteur tourbillon d'un élément fluide au point de coordonnées (1,2,1) et au temps $t = 3$ s.

3.3 Écoulement de jet

Le champ de vitesse pour un écoulement bidimensionnel et stationnaire est donné par : $\vec{U} = \dfrac{U_0}{l}\left(x\,\vec{i} - y\,\vec{j}\right) = u_x\vec{i} + u_y\vec{j}$ où U_0 et l sont des constantes.

1. Où dans l'écoulement la vitesse est-elle égale à U_0 ? Représenter le champ de vitesse dans le 1er quadrant ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$) en dessinant les flèches représentant la vitesse du fluide à des localisations bien précises.

2. Déterminer les lignes de courant pour cet écoulement.

3. Déterminer le champ d'accélération pour cet écoulement.

3.4 Écoulement de jet sur une plaque

Un fluide parfait incompressible s'écoule selon l'axe vertical Oz. En régime permanent, le champ des vitesses en coordonnées cylindriques est de la forme : $\overrightarrow{U} = 2k\,r\,\overrightarrow{e_r} + k'\,z\,\overrightarrow{e_z}$

1. Exprimer la constante k' en fonction de la constante k. *Par la suite, les résultats ne devront faire intervenir que la constante k.*

2. Montrer que l'écoulement considéré est irrotationnel.

3. Déterminer le vecteur accélération $\vec{a}$ en chaque point $M(r,\theta,z)$ de l'écoulement.

4. Déterminer le potentiel des vitesses $\phi(r,z)$ et calculer son laplacien.

5. Déterminer l'équation des lignes de courant et tracer leur allure.

6. Montrer que le caractère incompressible du fluide peut s'écrire : $\dfrac{\partial}{\partial r}(rU_r) = -\dfrac{\partial}{\partial z}(rU_z)$.

En déduire, d'après le théorème de Schwartz, la fonction de courant $\psi(r,z)$ dont le gradient est perpendiculaire au gradient de ϕ.

7. Vérifier que les courbes $\psi(r,z) = Cste$ s'identifient aux lignes de courant. Justifier.

3.5 Décélération d'un gaz à travers une onde de choc

Une onde de choc est une couche très fine d'épaisseur l dans un écoulement de gaz supersonique à travers laquelle les propriétés du fluide (vitesse, masse volumique, pression etc.) changent brusquement de l'état (1) à l'état (2) comme montré sur la figure ci-dessous. Si $U_1 = 550\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $U_2 = 213\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $l = 2{,}5\,\mu\text{m}$, calculer alors la décélération du gaz lorsqu'il s'écoule à travers l'onde de choc. Combien de « g » cela représente-t-il ?

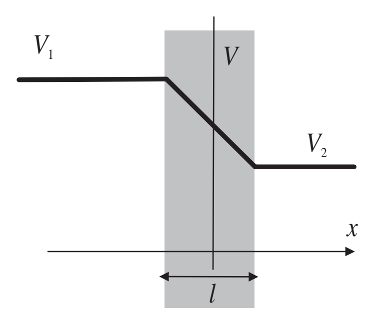


Figure 3.19 – **Représentation qualitative de la vitesse de la particule au travers de l'onde de choc dans le repère associé à l'onde.**

Solutions

3.1

$$u = \frac{dx}{dt} = x + t$$

La solution de l'équation ci-dessus est : $x = Ae^t - t - 1$

La constante A peut être déterminée par les conditions initiales :

$$x_0 = Ae^{t_0} - t_0 - 1 \Rightarrow A = \frac{x_0 + t_0 + 1}{e^{t_0}}$$

Par conséquent : $x = (x_0 + t_0 + 1)e^{(t-t_0)} - t - 1$

Cette dernière équation est la version lagrangienne de la particule fluide satisfaisant $x = x_0$ à $t = t_0$.

3.2 Le vecteur vitesse de translation au point (1, 2, 1) et au temps t = 3 s peut être donné par :

$$\vec{U} = (3 \times 1 \times 4)\,\vec{i} + (2 \times 1 \times 2)\vec{j} + (2 \times 1 \times 2 + 3 \times 3)\vec{k} = 12\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 13\vec{k}$$

Le vecteur vitesse rotationnelle est :

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \wedge \vec{U}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & & u_x \\ \frac{\partial}{\partial y} & \wedge & u_y \\ \frac{\partial}{\partial z} & & u_z \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\vec{j} - \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\vec{k}\right\}$$

$$= \frac{\vec{i}}{2}\left[\frac{\partial(2zy + 3t)}{\partial y} - \frac{\partial(2xy)}{\partial z}\right] + \frac{\vec{j}}{2}\left[\frac{\partial(3xy^2)}{\partial z} - \frac{\partial(2zy + 3t)}{\partial x}\right] + \frac{\vec{k}}{2}\left[\frac{\partial(2xy)}{\partial x} - \frac{\partial(3xy^2)}{\partial y}\right]$$

D'où : $\vec{\omega} = z\vec{i} + (y - 3xy)\vec{k}$ et au point (1, 2, 1) et à $t = 3$ s, $\vec{\omega} = \vec{i} - 4\vec{k}$

Le vecteur tourbillon quant à lui est égal à :

$$\vec{\Omega} = 2\vec{\omega} = 2\vec{i} - 8\vec{k}$$

3.3

1. La vitesse est :

$$U = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \frac{U_0}{l}\,(x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$U = U_0 \Leftrightarrow \frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{l} = 1 \Leftrightarrow (x^2 + y^2) = l^2.$$

Cette équation correspond à l'équation d'un cercle de centre O et de rayon l. L'écoulement à vitesse 2 U_0 est l'équation d'un cercle de centre O et de rayon 2 l, etc.

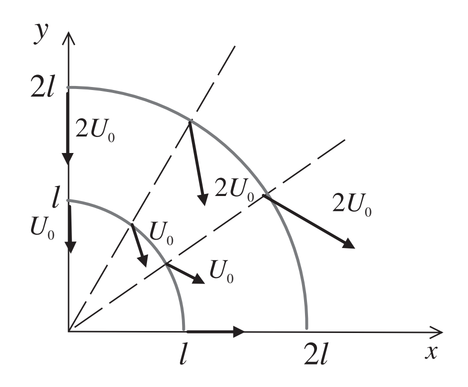


Figure 3.20 – Représentation de l'écoulement à vitesse U_0, $2U_0$, 20.

2. L'équation des lignes de courant est :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{u_y}{u_x} = \frac{-(U_0\ /\ l)\,y}{(U_0\ /\ l)\,x} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow xy = C$$

le long d'une ligne de courant où C est une constante. La fonction de courant est : $\psi = xy$. Cette fonction est représentée sur la figure ci-dessous pour différentes valeurs de la constante. Elle représente l'écoulement d'un jet sur une plaque.

3. L'accélération est :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \left(\vec{U} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{U} = \cancel{\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}} + u_x \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \vec{U}}{\partial y}$$

D'où

$$\vec{a} = \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\vec{i} + \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\vec{j} = \left(\frac{U_0}{l} x \frac{U_0}{l} + \frac{-U_0}{l}\ y \times 0\right)\vec{i}$$
$$+ \left(\frac{U_0}{l} x \times 0 + \frac{-U_0}{l}\ y\left(\frac{-U_0}{l}\right)\right)\vec{j}$$

D'où finalement :

$$\vec{a} = \frac{U_0^2}{l^2}\left(x\vec{i} + y\vec{j}\,\right)$$

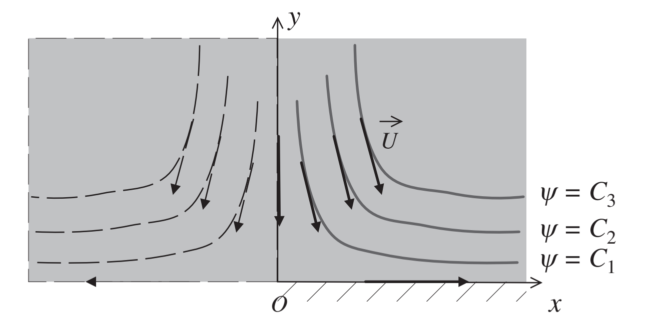


Figure 3.21 – Écoulement représentant un jet sur une plaque.

3.4

1. On a :

$\vec{\nabla}\cdot\vec{U} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rU_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U_\theta}{\partial r} + \dfrac{\partial U_z}{\partial z} = \dfrac{4kr}{r} + k' = 0$ dans le cas d'un fluide incompressible. Donc $k' = -4k$ et $\vec{U} = 2kr\vec{e_r} - 4kz\vec{e_z}$

2. On calcule le rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{U} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial U_z}{\partial\theta} - \dfrac{\partial(rU_\theta)}{\partial z}\right] = 0 \\ \dfrac{\partial U_r}{\partial z} - \dfrac{\partial U_z}{\partial r} = 0 \\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial(rU_\theta)}{\partial z} - \dfrac{\partial U_r}{\partial\theta}\right] = 0 \end{vmatrix}$$

L'écoulement est donc bien irrotationnel.

3. Par définition :

$$\vec{a} = (\vec{U}.\vec{\nabla})\vec{U} = \vec{\nabla}\left(\frac{U^2}{2}\right) + \cancel{\overrightarrow{\text{rot}}\vec{U}} \wedge \vec{U}$$

Or $U = \sqrt{4\,k^2\,r^2 + 16k^2z^2} = 2k\sqrt{r^2 + 4z^2} \Rightarrow \dfrac{U^2}{2} = 2k^2(r^2 + 4z^2)$

De plus $\vec{\nabla} = \dfrac{\partial}{\partial r}\vec{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\vec{e_\theta} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{e_z}$

D'où $\vec{\nabla}\left(\dfrac{U^2}{2}\right) = 4k^2r\vec{e_r} + 16k^2z\vec{e_z} = 4k^2(r\vec{e_r} + 4z\vec{e_z})$ et donc :

$$\vec{a} = 4k^2(r\vec{e_r} + 4z\vec{e_z})$$

4. Comme $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{U} = \vec{0} = \Rightarrow \exists\ \phi$ tel que $\vec{U} = \vec{\nabla}\phi \Rightarrow \begin{cases} 2kr = \dfrac{\partial\phi}{\partial r} & (1) \\ 0 = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\phi}{\partial\theta} & (2) \\ -4kz = \dfrac{\partial\phi}{\partial z} & (3) \end{cases}$

(2) $\Rightarrow \phi = \phi(r, z)$

(1) $\Rightarrow \phi = k\,r^2 + C_1(z)$. Et donc $\dfrac{\partial\phi}{\partial z} = C_1'(z) = -4kz \Rightarrow C_1(z) = -2kz^2 + C_2$

Où C_2 est une constante. D'où finalement : $\phi = k\ r^2 - 2kz^2 + C_2$

5. Équation des lignes de courant :

$$\frac{\mathrm{d}r}{U_r} = \frac{\mathrm{d}z}{U_z} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}r}{2kr} = \frac{\mathrm{d}z}{-4kz}$$

Soit en intégrant, on obtient l'équation des lignes de courant suivante : $r^2z = cste$. On trace alors ces lignes de courant :

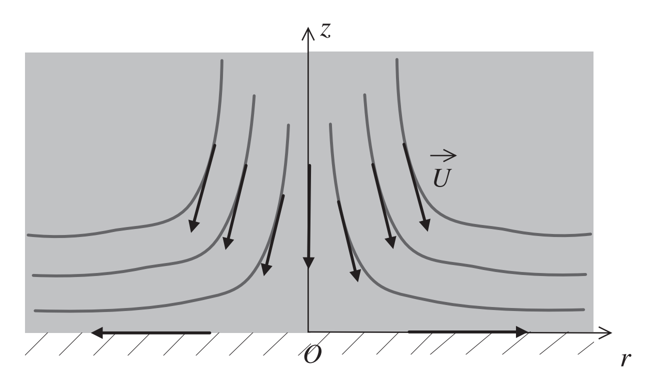


Figure 3.22

Cet écoulement correspond à l'écoulement d'un jet sur une plaque. L'axe (Oz) est une ligne de courant.

6. Comme l'écoulement est incompressible alors on peut écrire que :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rU_r)}{\partial r} = -\frac{\partial U_z}{\partial z} \text{ et donc } \frac{\partial(rU_r)}{\partial r} = -\frac{\partial(rU_z)}{\partial z}$$

$d\psi$ étant une différentielle totale exacte, on peut écrire :

$$\mathrm{d}\psi(r,z) = \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathrm{d}z = -rU_z\ \mathrm{d}r + rU_r\ \mathrm{d}z = F_1\ \mathrm{d}r + F_2\ \mathrm{d}z$$

Car d'après le théorème de *Schwartz*, on a bien $\partial F_1/\partial z = \partial F_2/\partial r$ et on vérifie bien que $\vec{\nabla}\phi$ est perpendiculaire à $\vec{\nabla}\psi$:

$$\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\psi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z} = U_r(-rU_z) + U_z(rU_r) = 0$$

La fonction de courant peut être déterminée par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial r} = -rU_z = 4kzr \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial z} = rU_r = 2kr^2 \end{cases}$$

En intégrant on obtient : $\psi = 2kzr^2 + C$

7. Lorsque $\psi = cste$ alors $zr^2 = cste$ et on retrouve bien le résultat du 5). On sait que $\overrightarrow{\nabla}\phi \perp \overrightarrow{\nabla}\psi$ donc $\overrightarrow{U} \perp \overrightarrow{\nabla}\psi$. Or $\overrightarrow{\nabla}\psi$ est normal à $\psi = cste$, donc $\overrightarrow{U}$ est tangente en chaque point de la courbe $\psi = cste$.

3.5 On a : $\vec{a} = \dfrac{\partial \overrightarrow{U}}{\partial t} + \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{U}$ avec $\overrightarrow{U} = U(x)\vec{i}$

Donc $\vec{a} = U \dfrac{\partial U}{\partial x}\vec{i}$

Ne connaissant pas a priori la distribution de vitesse $U(x)$, l'accélération peut être approchée par :

$$a_x = U\frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{(U_1 + U_2)}{2}\frac{(U_2 - U_1)}{l} = \frac{550 + 213}{2} \times \frac{(213 - 550)}{2{,}5 \times 10^{-6}} = -8{,}85 \times 10^{10}\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Et donc : $\dfrac{a_x}{g} = \dfrac{-8{,}85 \times 10^{10}}{9{,}81} = -9{,}02 \times 10^{9}$

L'accélération que subit la particule fluide au passage d'une onde de choc est gigantesque !

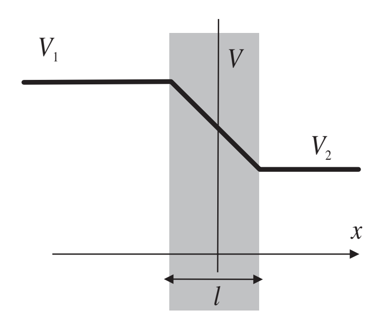


Figure 3.23 – Représentation qualitative de la vitesse de la particule au travers de l'onde de choc dans le repère associé à l'onde.

Bibliographie

BLOOMER J. J., *Practical Fluid Mechanics for Engineering applications*, Marcel Dekker Inc. edition, 2000.

CANDEL S., *Mécanique des fluides*, DUNOD, 1990.

CHASSAING P., *Mécanique des fluides*, CEPADUES, 1997.

DES JARDINS D., COMBARNOUS M., BONNETON N., *Mécanique des fluides-Problèmes résolus avec rappels de cours*, DUNOD, Paris, 2002.

DESJARDINS D., TOUZET-CORTINA M., *Introduction à la mécanique des milieux continus ; cours et exercices corrigés*, DUNOD, 1999

MONAVON A., *Mini manuel de Mécanique des fluides*, DUNOD, Paris, 2010.

MUNSON B. R., YOUNG D. F., OKIISHI T. H., *Fundamentals of Fluid Mechanics*, John Wiley & Son, 2002.

4 DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS : ÉQUATIONS DE BERNOULLI ET BILANS SUR VOLUME DE CONTRÔLE

PLAN

OBJECTIFS

- ➤ Démontrer la relation de Bernoulli pour les fluides parfaits
- ➤ Examiner les cas particuliers des fluides barotropes et de l'écoulement irrotationnel
- ➤ Établir la méthodologie d'utilisation des bilans macroscopiques
- ➤ Démontrer les relations de bilan de masse et de quantité de mouvement
- ➤ Examiner le cas particulier des écoulements unidirectionnels
- ➤ Calculer l'effort résultant à partir de la fonction complexe

4.1 INTRODUCTION

Lorsque le fluide est en mouvement, la pression en tout point du fluide est dépendante de l'altitude et de la masse volumique du fluide (on retrouve ici la relation de l'hydrostatique décrite au chapitre 2) mais aussi de la vitesse du fluide. La pression est donc la somme d'une pression motrice et d'une pression dynamique. La pression et la vitesse dans un écoulement de fluide parfait sont liées par la relation de Bernoulli, relation qui est démontrée dans ce chapitre.

La relation de *Bernoulli* permet de calculer la pression et la vitesse sur une ligne de courant dans la configuration d'un fluide parfait (nous aborderons l'application de cette relation pour les fluides visqueux au chapitre 7).

Afin de calculer les efforts exercés par le fluide en mouvement sur les objets solides avec lesquels il est en contact, nous allons utiliser les bilans de masse et de quantité de mouvement sur des volumes de contrôle englobant l'écoulement dans sa globalité ou en partie. Ceci fait l'objet de la deuxième partie de ce chapitre. Nous verrons que cette approche conduit à un outil de calcul simple et performant dans la configuration de l'écoulement globalement unidimensionnel en régime permanent. Une démonstration très complète de ces bilans en régime transitoire sera présentée au chapitre 5.

Dans ce chapitre nous supposons un écoulement incompressible et permanent de fluides parfaits. Nous verrons au chapitre 7 une généralisation de ces outils au cas des fluides visqueux.

4.2 Théorème de Bernoulli

4.2.1 Démonstration par la conservation de l'énergie

Considérons l'écoulement permanent et incompressible d'un fluide dont la température est uniforme. Nous avons défini la ligne de courant comme le lieu des points où la vitesse d'une particule fluide est tangente à cette ligne (voir Figure 4.1). Étant donné les hypothèses, la particule fluide sur cette ligne de courant conserve son énergie. Ainsi, la somme des variations d'énergie interne, potentielle et cinétique est égale à la quantité de chaleur et de travail reçue ou cédée par la particule fluide lors de son trajet sur la ligne de courant. Nous avons vu que cette conservation de l'énergie se traduit mathématiquement sous la forme du premier principe pour un système ouvert (voir chapitre 1 dans le cas d'un système fermé où il n'y a pas de variation d'énergie cinétique et potentielle) :

$$\mathrm{d}\left(e+\frac{p}{\rho}\right)+\mathrm{d}\frac{u^2}{2}+g\,\mathrm{d}z=\delta w'+\delta q \qquad (4.1)$$

Dans cette relation e désigne l'énergie interne massique, u la vitesse, p la pression, ρ la masse volumique, g l'accélération de la pesanteur, $\delta w'$ l'accroissement du travail des forces autres que celles de pression et δq l'accroissement de chaleur. La variation d'énergie interne e est nulle puisque la température du fluide est uniforme (on se rappelle en effet que dans le cas d'un gaz parfait $\mathrm{d}e = \rho C_v\,\mathrm{d}T$), donc la relation précédente devient :

$$\mathrm{d}\left(\frac{p}{\rho g}+\frac{u^2}{2g}+z\right)=\frac{\delta w'}{g}+\frac{\delta q}{g} \qquad (4.2)$$

Ainsi entre deux points A et B d'une même ligne de courant, on a donc :

$$\left(\frac{p}{\rho g}+\frac{u^2}{2g}+z\right)_A-\left(\frac{p}{\rho g}+\frac{u^2}{2g}+z\right)_B=H \qquad (4.3)$$

$H = (\delta w' + \delta q)/g$ est appelée la perte de charge et a la dimension d'une hauteur (m). Le fluide étant parfait et sans transfert avec l'extérieur ($\delta q = 0$), et s'il n'y a pas de travail fourni ou cédé sur la ligne de courant ($\delta w' = 0$), alors $H = 0$.

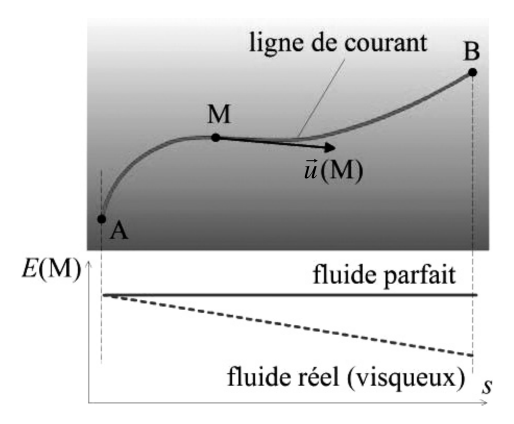


Figure 4.1 – Conservation de l'énergie de la particule fluide sur une ligne de courant. Pour un fluide parfait, l'énergie se conserve entre deux points de la ligne de courant. Dans le cas d'un fluide réel (visqueux), il y a dissipation d'énergie sous forme de chaleur à cause des frottements (*E* désigne l'énergie totale de la particule fluide et *s* est l'abscisse curviligne).

Remarque

Nous verrons au chapitre 7 que la viscosité du fluide induit un cisaillement des lignes de courant qui se traduit par une dissipation thermique. Plus la viscosité est grande et plus cette dissipation est importante. Dans ce cas, une perte de charge *H* apparaît due aux frottements visqueux (voir la Figure 4.1).

Le fait de placer une pompe (gain d'énergie) ou une turbine (perte d'énergie) entre les deux points d'une même ligne de courant va entraîner une différence sur l'énergie de la particule fluide entre ces points ($\delta w' \neq 0$).

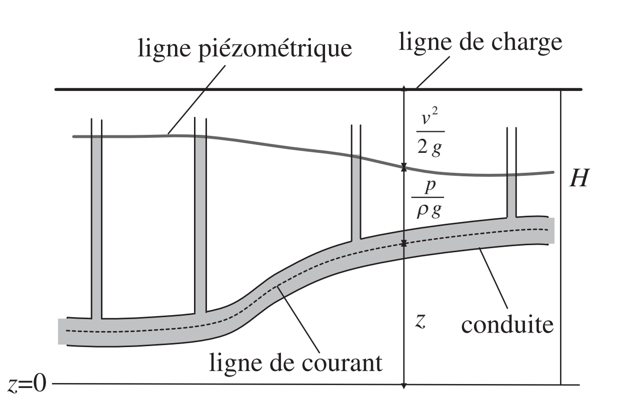


Figure 4.2 – Représentation de la ligne de charge et de la ligne piézométrique pour l'écoulement d'un fluide parfait dans une conduite.

La ligne de charge est une représentation graphique de l'énergie totale de la particule fluide en chaque point de l'écoulement. Elle est horizontale pour un fluide parfait sauf lorsque l'on rajoute ou prélève de l'énergie à l'aide d'un dispositif mécanique (comme une pompe ou une turbine par exemple). La *ligne piézométrique* est parallèle à la *ligne de charge* mais toujours inférieure. Elle ne prend en compte que l'énergie relative aux efforts de pression (terme $p/\rho g$ dans la relation de *Bernoulli*) et aux efforts correspondant à l'énergie potentielle (altitude z). Un exemple d'illustration est donné sur la Figure 4.2.

4.2.2 Démonstration du théorème de Bernoulli à partir du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

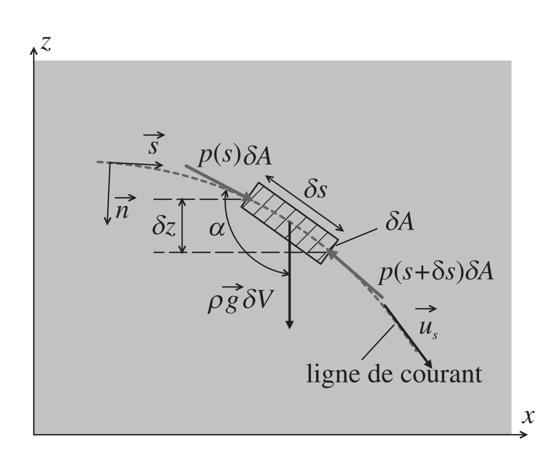


Figure 4.3 – **Démonstration du théorème de Bernoulli par application du PFD sur une particule dans un écoulement de fluide parfait.**

Considérons une particule fluide sous la forme d'un cylindre infiniment petit de longueur δs et de section δA et qui est mobile sur une ligne de courant tel que cela est représenté sur la Figure 4.3. L'application du *principe fondamental de la dynamique* (PFD) exprime que les forces agissant sur la particule équilibrent son accélération a_s multipliée par sa masse $m = \rho\,\delta V$ (soit la relation classique de *Newton* $\sum \vec{F} = m\vec{a_s}$). Les efforts agissant sur la particule fluide sont les efforts de pression et le poids. En projection sur la ligne de courant, ceci revient à écrire :

$$p(s)\delta A - p(s+\delta s)\,\delta A - \rho g\,\delta V \cos\alpha = \rho\,\delta V\,a_s \tag{4.4}$$

Nous avons vu dans le Chapitre 3 que la dérivée particulaire permet d'exprimer l'accélération à partir de la vitesse u_s de la particule sous la forme :

$$a_s = u_s \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial t} \tag{4.5}$$

Si nous notons δz la différence de hauteur entre l'entrée et la sortie du domaine, nous voyons que :

$$\delta z = \delta s \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \delta s \cos\alpha \quad (4.6)$$

Ce qui conduit à :

$$\cos\alpha = \frac{\partial z}{\partial s} \quad (4.7)$$

De plus $p(s + \delta s) = p(s) + (\partial p/\partial s)\delta s$ au premier ordre. En divisant la relation (4.4) par $\delta V = \delta s\, \delta A$ et en utilisant les relations (4.5) et (4.7), nous obtenons :

$$-\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \frac{\partial z}{\partial s} = \rho\left(u_s \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial t}\right) \quad (4.8)$$

Or :

$$\rho u_s \frac{\partial u_s}{\partial s} = \rho \frac{\partial (u_s^2/2)}{\partial s} \quad (4.9)$$

La relation (4.8) s'écrit donc sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{p}{\rho g} + \frac{u_s^2}{2g} + z\right] = -\frac{1}{g}\frac{\partial u_s}{\partial t} \quad (4.10)$$

En régime permanent, le terme transitoire s'annule et on retrouve l'équation de *Bernoulli* sur une ligne de courant :

$$\boxed{\frac{p}{\rho g} + \frac{u_s^2}{2g} + z = \text{Constante}} \quad (4.11)$$

4.2.3 Cas de l'écoulement irrotationnel en régime transitoire

Lorsque l'écoulement est irrotationnel ($\vec{\nabla} \wedge \vec{u_s} = \vec{0}$), nous avons vu dans le chapitre 3 que le champ de vitesse dérive d'un potentiel ϕ tel que $\vec{u_s} = \vec{\nabla}\phi$. En remplaçant la valeur de la vitesse par son expression précédente, la relation (4.10) s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{p}{\rho g} + \frac{u_s^2}{2g} + z\right] = -\frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial s}\right) = -\frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \quad (4.12)$$

Soit l'expression équivalente :

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{g}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho g} + \frac{u_s^2}{2g} + z\right] = 0 \quad (4.13)$$

ou encore :

$$\frac{1}{g}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho g} + \frac{u_s^2}{2g} + z = K(t) \quad (4.14)$$

Cette relation est souvent appelée *second théorème de Bernoulli*. Son intérêt principal est de calculer la fonction potentielle dans une évolution transitoire.

4.3 Méthodologie de construction des bilans macroscopiques

4.3.1 Objectifs

Les bilans de masse et de quantité de mouvement ont pour objectif de calculer les efforts exercés par un fluide en mouvement sur une surface solide indéformable. *Nous ne traiterons ici que des écoulements permanents et incompressibles de fluides parfaits*. Nous généraliserons ces bilans au cas des fluides réels dans le chapitre 7.

4.3.2 Méthodologie de construction des bilans macroscopiques

Afin de bien comprendre la méthodologie de construction des bilans de masse et de quantité de mouvement, nous allons l'illustrer sur un exemple. Considérons un jet de fluide parfait incident à une plaque inclinée d'un angle α par rapport à la verticale (voir Figure 4.4). Ce jet se partitionne en 2 parties qui vont s'écouler le long de la plaque. On note que le fluide 2 s'écoule dans un autre fluide (fluide 1) qui lui est au repos. L'objectif est de rechercher l'effort résultant exercé par le jet sur la plaque et son point d'application.

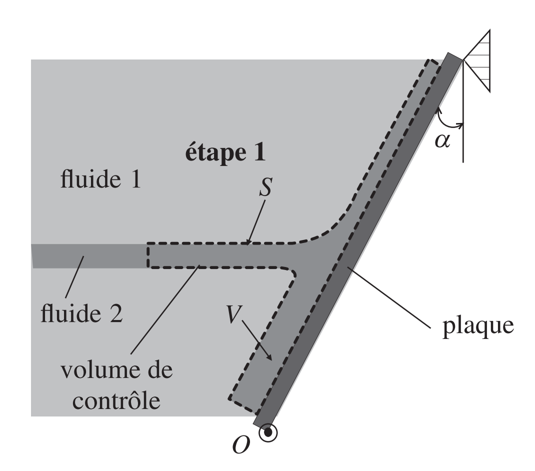


Figure 4.4 – **Un jet fluide, s'écoulant dans un fluide au repos, impacte une surface solide indéformable inclinée. Le jet se partitionne en deux parties.**

Dans un premier temps, il est nécessaire de définir un *volume de contrôle* englobant le volume de fluide que l'on désire isoler, c'est l'étape 1 sur la Figure 4.4. Nous désignons par V ce volume de contrôle. Il est délimité par la surface S. Ce volume de contrôle est fixe par rapport à un référentiel absolu d'espace. Ceci signifie que le fluide traverse le volume de contrôle mais que ce dernier reste identique à lui-même au cours du temps. En

d'autres termes, ce volume de contrôle est fixe et ne se déforme pas au cours du temps (formalisme lagrangien pour l'étude de l'écoulement du fluide vu au chapitre 3).

Nous isolons le volume de contrôle du reste du système étudié de façon à faire apparaître les efforts extérieurs agissant sur ce domaine. C'est l'étape 2 représentée sur la Figure 4.5. Nous avons les efforts liés au poids $\vec{P}$ du fluide, les efforts de pression sur les surfaces constituant l'enveloppe S du volume de contrôle et les forces associées à l'inertie du fluide, c'est-à-dire au champ de vitesse $\vec{u}$. Concernant les efforts de pression nous distinguons ceux exercés par les fluides entre eux et ceux exercés du fait de la présence de la paroi solide. Le principe d'action et de réaction énonce que l'effort $\vec{F_p}$ exercé par le fluide sur la plaque est égal à l'opposé de l'effort exercé par la plaque sur le fluide.

Il ne reste plus alors qu'à appliquer le bilan de masse et le bilan de quantité de mouvement sur ce volume de contrôle.

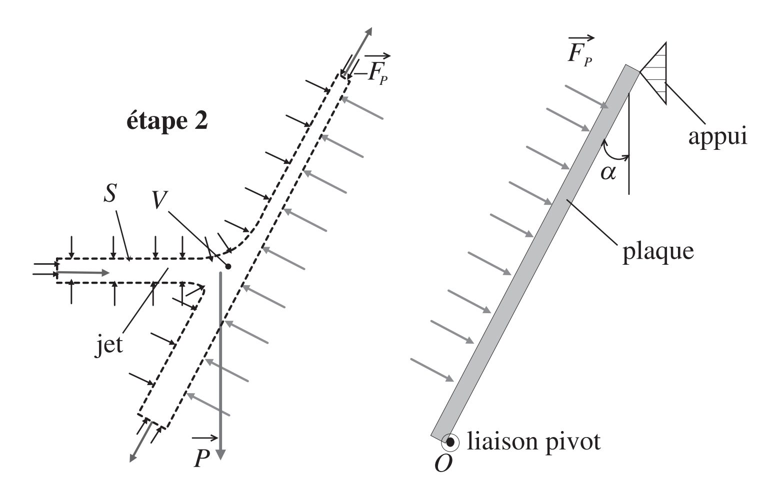


Figure 4.5 – **On isole le volume du contrôle fluide de façon à faire apparaître l'ensemble des efforts s'exerçant sur le volume V de contrôle. Les flèches noires désignent les efforts de pression (perpendiculaires aux surfaces), les flèches grises sont les efforts dus à l'inertie du fluide, les efforts résultant du contact avec la paroi solide et le poids du fluide compris dans le volume de contrôle.**

4.4 Bilan macroscopique de masse

4.4.1 Définition

Bilan de masse

Le bilan de masse consiste à écrire que la variation de masse contenue dans le volume de contrôle fixe V au cours du temps est nulle :

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \,\mathrm{d}V = 0 \tag{4.15}$$

En régime permanent ($\partial/\partial t = 0$) la somme des débits masse entrant (Q_m^+) dans V doit égaler la somme des débits masse sortants (Q_m^-) de V, soit :

$$Q_m^+ - Q_m^- = 0 \tag{4.16}$$

Le débit masse à travers une section d'aire A est par définition :

$$Q_m = \int_A \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A \tag{4.17}$$

Il en résulte donc que le débit masse au travers de la surface S entourant le volume de contrôle V doit être nulle, soit :

$$\boxed{\int_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S = 0} \tag{4.18}$$

4.4.2 Application à un écoulement unidirectionnel

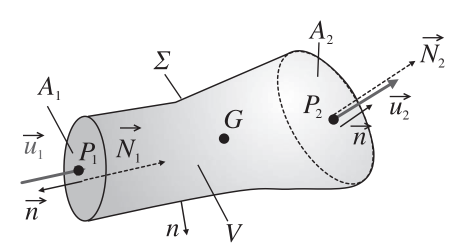


Figure 4.6 – **Écoulement unidirectionnel dans un volume de contrôle.**

Supposons que l'écoulement soit dirigé dans une seule direction comme cela est représenté sur la Figure 4.6. Le volume de contrôle fixe V est limité par la surface latérale Σ et par les sections d'entrée et de sortie A_1 et A_2 respectivement ($S = A_1 + A_2 + \Sigma$). Nous appelons $\overrightarrow{N_1}$ et $\overrightarrow{N_2}$ les normales aux sections A_1 et A_2 orientées dans le sens de l'écoulement, soit donc :

$$\overrightarrow{N_1} = -\vec{n}, \quad \overrightarrow{N_2} = \vec{n} \tag{4.19}$$

Le bilan macroscopique de masse sur le volume de contrôle s'écrit d'après la relation (4.18) :

$$\int_{\Sigma + A_1 + A_2} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S = 0 \tag{4.20}$$

La vitesse étant perpendiculaire à la normale sortante en tout point de Σ, la relation (4.20) se simplifie sous la forme :

$$-\int_{A_1} \rho \overrightarrow{U_1} \cdot \overrightarrow{N_1} \, \mathrm{d}A + \int_{A_2} \rho \overrightarrow{U_2} \cdot \overrightarrow{N_2} \, \mathrm{d}A = 0 \tag{4.21}$$

D'autre part, l'écoulement est unidirectionnel :

$$\overrightarrow{U_1} \cdot \overrightarrow{N_1} = U_1, \; \overrightarrow{U_2} \cdot \overrightarrow{N_2} = U_2 \tag{4.22}$$

Les vitesses U_1 et U_2 étant uniformes sur les sections A_1 et A_2 respectivement, on obtient finalement :

$$-U_1 A_1 + U_2 A_2 = 0 \tag{4.23}$$

On retrouve la relation de conservation du débit volume :

$$\boxed{U_1 A_1 = U_2 A_2 = Q_v} \tag{4.24}$$

4.5 Bilan macroscopique de quantité de mouvement

4.5.1 Formulation générale

Le *bilan de quantité de mouvement* appliqué sur un volume de contrôle exprime que la variation de quantité de mouvement du fluide, présent dans le volume de contrôle à l'instant t, par rapport au temps est égale à la somme $\overrightarrow{F_e}$ des efforts extérieurs exercés sur V. Ceci se traduit mathématiquement sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\,\vec{u}\,\mathrm{d}V = \overrightarrow{F_e} \tag{4.25}$$

En régime permanent ($\partial/\partial t = 0$), la variation de quantité de mouvement du fluide contenu dans V est égale à la somme des débits de quantité de mouvement entrants ($\overrightarrow{Q_u^+}$) dans V et de la somme des débits de quantité de mouvements sortants ($\overrightarrow{Q_u^-}$) de V. Le débit de quantité de mouvement à travers une section d'aire A est par définition :

$$Q_u = \int_A \rho\vec{u}\left(\vec{u}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S \tag{4.26}$$

En régime permanent, la relation (4.25) consiste donc à dire que la variation de quantité de mouvement au travers de la surface de contrôle S est égale à la somme des efforts exercés sur le volume de contrôle V :

$$\int_S \rho\,\vec{u}\left(\vec{u}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S = \overrightarrow{F_e} \tag{4.27}$$

Les forces extérieures agissant sur le volume de contrôle sont :

1. Le poids du fluide.
2. Les efforts de pression du fluide qui environne V. Nous écrirons cette contribution sous la forme :

   $$\int_S -P\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

   Le signe négatif traduit le fait que les efforts de pression du fluide environnant sur le volume de contrôle sont dans le sens opposé à la normale sortante $\vec{n}$ à V.
3. Dans le cas où la surface du volume de contrôle passe par l'interface entre le fluide et une paroi solide (c'est le cas du jet sur une plaque que nous avons examiné comme exemple d'illustration plus haut), on notera $\overrightarrow{F_s}$ l'effort résultant de la paroi solide sur le fluide (c'est-à-dire l'opposé de l'action $\overrightarrow{F_e}$ du fluide sur la paroi solide).

Ceci conduit alors à écrire la relation (4.27) sous la forme :

$$\boxed{\int_S \rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) \mathrm{d}S = \int_V \rho \vec{g} \, \mathrm{d}V + \int_S -P\vec{n} \, \mathrm{d}S + \overrightarrow{F_s}} \tag{4.28}$$

Ce résultat constitue le *théorème de quantité de mouvement* que l'on peut donc énoncer sous la forme :

Théorème de quantité de mouvements

Le flux de quantité de mouvement à travers de la surface fermée d'un volume de contrôle est égal à la somme des efforts extérieurs appliqués sur le volume de contrôle.

4.5.2 Application à un écoulement unidirectionnel

Reprenons l'écoulement unidirectionnel représenté sur la Figure 4.6. Avec les notations utilisées nous pouvons calculer chaque intégrale intervenant dans la relation (4.28), soit :

$$\int_S P\vec{n} \, \mathrm{d}S = -P_1 A_1 \overrightarrow{N_1} + P_2 A_2 \overrightarrow{N_2} + \int_\Sigma P\vec{n} \, \mathrm{d}S \tag{4.29}$$

D'autre part :

$$\int_S \rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) \mathrm{d}S = \int_{A_1} \rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) \mathrm{d}S + \int_{A_2} \rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) \mathrm{d}S + \int_\Sigma \rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) \mathrm{d}S \tag{4.30}$$

Comme le vecteur vitesse est perpendiculaire à la normale sortante sur la surface Σ, la dernière intégrale du second membre de l'égalité précédente est nulle. En projetant sur les normales $\overrightarrow{N_1}$ et $\overrightarrow{N_2}$ nous obtenons :

$$\int_S \rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) \mathrm{d}S = -\rho U_1^2 A_1 \overrightarrow{N_1} + \rho U_2^2 A_2 \overrightarrow{N_2} \tag{4.31}$$

Et donc d'après la relation de conservation du débit masse :

$$\int_S \rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) \mathrm{d}S = -Q_m U_1 \overrightarrow{N_1} + Q_m U_2 \overrightarrow{N_2} \tag{4.32}$$

La relation (4.28) s'écrit maintenant à partir des relations (4.29) et (4.32) et conduit à l'expression de la force de pression exercée sur la surface Σ du volume de contrôle :

$$\boxed{\overrightarrow{F_\Sigma} = -\int_\Sigma P\vec{n} \, \mathrm{d}S = P_1 A_1 \overrightarrow{N_1} - P_2 A_2 \overrightarrow{N_2} + Q_m U_1 \overrightarrow{N_1} - Q_m U_2 \overrightarrow{N_2} - m\vec{g}} \tag{4.33}$$

Cette relation constitue le *théorème d'Euler* et s'écrit aussi :

$$\overrightarrow{F_\Sigma} = \Im_1 \overrightarrow{N_1} - \Im_2 \overrightarrow{N_2} - m\vec{g} \tag{4.34}$$

La quantité $\Im = Q_m U + P A$ a la dimension d'une force et est appelée impulsion.

4.6 Bilan macroscopique pour le moment angulaire

Nous avons vu que l'application du bilan de quantité de mouvement renseigne sur l'action résultante qu'exerce un fluide en écoulement sur une paroi solide. Par contre, ce bilan ne donne pas (sauf si des symétries d'écoulement sont évidentes) la position du point d'application de cette résultante. Si M est ce point, le moment de la résultante en M doit être nul. Pour déterminer les coordonnées de M il nous suffit de calculer le moment au point M des actions exercées sur le volume de contrôle à partir de la relation :

$$\int_S \overrightarrow{MI} \wedge \rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) \mathrm{d}S = \int_V \overrightarrow{MG} \wedge \rho \vec{g} \, \mathrm{d}V - \int_S \overrightarrow{MI} \wedge P \vec{n} \, \mathrm{d}S \tag{4.35}$$

Dans cette relation I désigne le point courant sur la surface S du volume de contrôle.

On trouve ainsi que pour un écoulement unidirectionnel, en se référant à la figure Figure 4.6, le point M d'application de la résultante est tel que :

$$\vec{0} = \overrightarrow{MP_1} \wedge \Im_1 \overrightarrow{N_1} - \overrightarrow{MP_2} \wedge \Im_2 \overrightarrow{N_2} - \overrightarrow{MG} \wedge m \vec{g} \tag{4.36}$$

4.7 Relations de Blasius

Au chapitre 3, nous avons vu l'intérêt de décrire l'écoulement d'un fluide parfait en écoulement permanent incompressible et irrotationnel à partir de la fonction complexe $f(z)$. Le deuxième intérêt de cette représentation est de pouvoir calculer la résultante des efforts qu'un fluide en écoulement exerce sur un profil solide de contour C. Pour cela nous exprimons l'effort résultant à partir de la relation (4.28) de la quantité de mouvement établie précédemment et en négligeant le poids du fluide :

$$\vec{R} = \oint_C \rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) \mathrm{d}l - \oint_C -P \vec{n} \, \mathrm{d}l \tag{4.37}$$

Nous exprimons le module de la résultante en nous plaçant dans le plan complexe sous une forme faisant apparaître la contribution de la vitesse et celle de la pression :

$$R = R_x - i R_y = \left(Ru_x - i Ru_y\right) + \left(Rp_x - i Rp_y\right) \tag{4.38}$$

En notant les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{u} = \left(u_x, u_y\right)$, la vitesse complexe est définie par :

$$\xi = \frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} = u_x(x,y) - i u_y(x,y) \tag{4.39}$$

où $f(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$ est la fonction potentiel complexe, et $\phi(x,y)$ et $\psi(x,y)$ sont respectivement la fonction potentiel et la fonction courant définies telles que (en coordonnées cartésiennes) :

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ u_y(x,y) &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \tag{4.40}$$

On trouve ainsi que :

$$Ru_x - iRu_y = \oint_C \rho\, u_x (\vec{u}\cdot\vec{n})\mathrm{d}l - i\oint_C \rho\, u_y (\vec{u}\cdot\vec{n})\mathrm{d}l = \oint_C \rho\, u_x\,\mathrm{d}\psi - i\oint_C \rho\, u_y\,\mathrm{d}\psi \quad (4.41)$$

En effet :

$$(\vec{u}\cdot\vec{n})\mathrm{d}l = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}y \\ -\mathrm{d}x \end{pmatrix} = \frac{\partial\psi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\psi$$

Donc :

$$Ru_x - iRu_y = \oint_C \rho\,(u_x - iu_y)\mathrm{d}\psi = \oint_C \rho\,\xi\,\mathrm{d}\psi \quad (4.42)$$

Comme : $\xi\mathrm{d}z = \mathrm{d}\phi + i\mathrm{d}\psi$ et donc que : $\bar{\xi}\overline{\mathrm{d}z} = \mathrm{d}\phi - i\mathrm{d}\psi$, on a alors : $\mathrm{d}\psi = i(\bar{\xi}\overline{\mathrm{d}z} - \xi\mathrm{d}z)/2$. Ceci permet d'écrire la relation (4.42) sous la forme équivalente :

$$Ru_x - iRu_y = i\frac{\rho}{2}\oint_C \xi\bar{\xi}\overline{\mathrm{d}z} - \xi^2\,\mathrm{d}z \quad (4.43)$$

De la même façon on a :

$$\overrightarrow{R_p} = -\oint_C p\vec{n}\,\mathrm{d}l$$

Avec :

$$\vec{n}\,\mathrm{d}l = \begin{pmatrix} -\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}x \end{pmatrix}$$

On trouve donc :

$$Rp_x - iRp_y = -\oint_C P\,\mathrm{d}y + i\oint_C P\,\mathrm{d}x = i\oint_C P\,\overline{\mathrm{d}z} \quad (4.44)$$

Or, le théorème de *Bernoulli* écrit en fonction de la vitesse complexe nous donne (en négligeant les forces de volume) : $P + \frac{1}{2}\rho\xi\bar{\xi} = C^{te}$. Le contour C étant fermé, on a donc :

$$Rp_x - iRp_y = \frac{\rho}{2}\oint_C \xi\bar{\xi}\,\mathrm{d}y + i\frac{\rho}{2}\oint_C \xi\bar{\xi}\,\mathrm{d}x = -i\frac{\rho}{2}\oint_C \xi\bar{\xi}\overline{\mathrm{d}z} \quad (4.45)$$

À partir des relations (4.38), (4.43) et (4.45) on trouve finalement :

$$\boxed{R = R_x - iR_y = -i\frac{\rho}{2}\oint_C \xi^2\,\mathrm{d}z} \quad (4.46)$$

Dans le cas où le contour fermé C correspond à une ligne de courant alors l'action sur le contour se résume à l'action seule des forces de pression et la relation (4.46) constitue

la *première relation de Blasius*. De même, en refaisant ce calcul pour le moment résultant en un point O quelconque, on trouve la *deuxième relation de Blasius* :

$$\boxed{M_O = -\frac{\rho}{2}\mathrm{Re}\left[\oint_C z\,\xi^2\,\mathrm{d}z\right]} \qquad (4.47)$$

Exercices

4.1 Pression sur le nez d'un sous-marin

Un sous-marin se déplace à une profondeur de 10 m sous le niveau de l'eau et à une vitesse de 15 m s^{-1}. Quelle est la pression qui s'exerce sur le nez de ce sous-marin ?

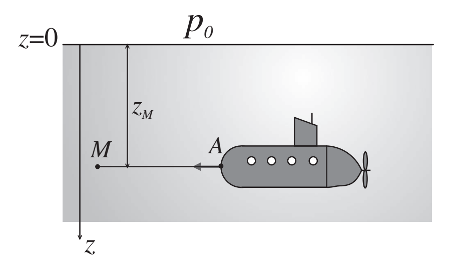


Figure 4.7

Hypothèses : l'écoulement de l'eau autour du sous-marin est incompressible et stationnaire. L'eau est supposée se comporter comme un fluide parfait.

On donne : $\rho_{\text{eau}} = 10^3$ kg m^{-3}, $g = 9{,}81$ m s^{-2}, $p_0 = 10^5$ Pa.

4.2 Vidange d'une cuve

Une cuve se présente sous la forme d'un réservoir de forme parallélépipédique de 10 m de longueur, 5 m de largeur et 2 m de profondeur. Cette cuve est remplie d'un liquide qui se vide par un orifice percé dans un fond horizontal débouchant à l'air libre et dont la section vaut $s = 0{,}5$ dm^2. Quel est le temps nécessaire à la vidange totale de la cuve ?

Hypothèses : l'écoulement du liquide est incompressible et stationnaire. Ce liquide se comporte comme un fluide parfait.

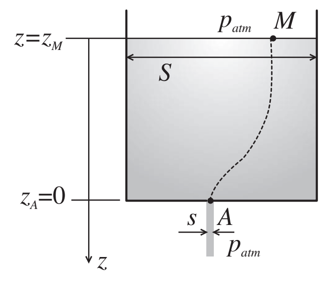


Figure 4.8

On donne : $g = 9{,}81\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

4.3 Puissance reçue par une turbine

Une turbine est un dispositif mécanique qui reçoit de la puissance mécanique (détente de vapeur surchauffée, chute d'eau…) et la transforme en une énergie mécanique sous la forme d'un mouvement de rotation. Ainsi, en couplant une génératrice à une turbine, on convertit de l'énergie mécanique en énergie électrique.

De l'eau circule dans une turbine avec un débit volume de $Q_v = 0{,}214\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1}$. Les pressions en A et B sont respectivement de 147,5 kPa et de –34,5 kPa.

Calculer la puissance en kW fournie par l'eau à la turbine.

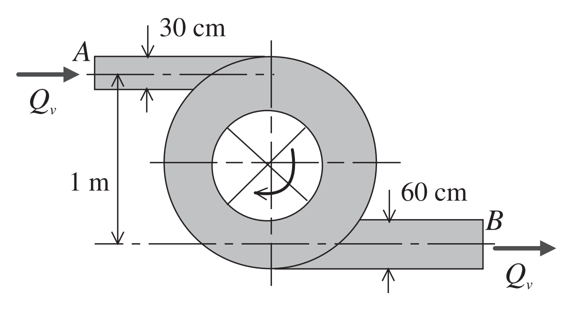


Figure 4.9

Hypothèses : l'écoulement du liquide est incompressible et stationnaire. Ce liquide se comporte comme un fluide parfait.

On donne : $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

4.4 Puissance d'une pompe

Une pompe est un dispositif mécanique qui, par son mouvement de rotation, met en circulation un fluide qui se comporte comme un fluide parfait dans un écoulement incompressible et stationnaire. Le débit volume de cette pompe est $Q_v = 9\ 000\ \text{l}\cdot\text{mn}^{-1}$. La conduite d'aspiration horizontale a un diamètre de 30 cm. Sur l'axe, il règne une pression P_1 de 20 cm de mercure au-dessous de la pression atmosphérique. Sa conduite de refoulement, horizontale, a un diamètre de 20 cm ; sur l'axe, situé à 1,22 m plus haut que le précédent, règne une pression P_2 de 7 m d'eau supérieure à la pression atmosphérique.

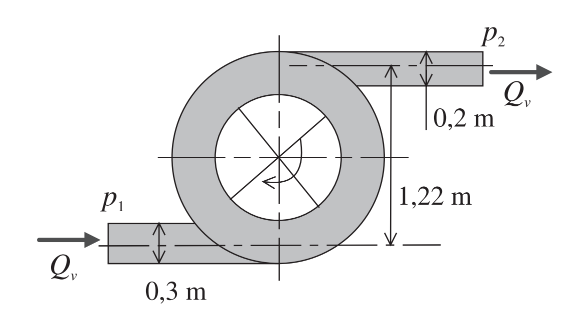


Figure 4.10

En supposant que le rendement de la pompe soit de 80 %, quelle puissance mécanique doit-on lui fournir ?
On donne : $g = 9.81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

4.5 Tube de Pitot

Le tube de Pitot est destiné à mesurer la vitesse $\vec{U}$ de l'écoulement d'un fluide. Il est placé dans un écoulement stationnaire et incompressible d'un fluide de masse volumique ρ et de vitesse $\vec{U}$ que l'on cherche à déterminer. Ce tube est introduit parallèlement aux lignes de courant, il est très allongé et a des dimensions petites. Il est constitué de deux orifices permettant des prises de pression dont la différence est mesurée à l'aide d'un manomètre différentiel. Il présente en son front un orifice *A* très petit, au niveau duquel s'effectue une première prise de pression dite totale. La seconde prise de pression dite statique s'effectue latéralement au point *B*. Le fluide à l'intérieur du tube est au repos. Nous supposerons pour simplifier que le fluide est non pesant (air, gaz …).

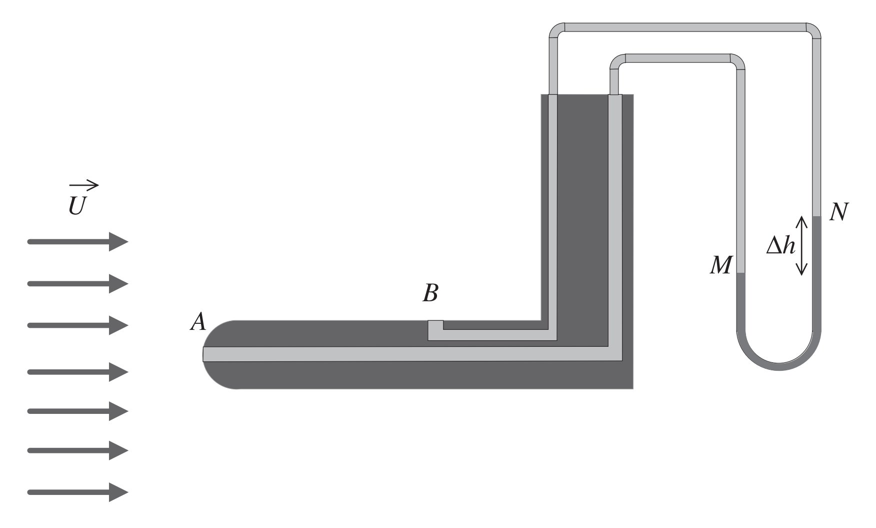


Figure 4.11

1. Écrire le théorème de *Bernoulli* entre les points *A* et *B*. En déduire une relation entre les pressions en *A* et *B*.

2. On admettra que la pression statique en *M* est égale à la pression au point *A* et qu'il est de même entre les points *N* et *B*. Le manomètre différentiel est à mercure (de masse volumique ρ_m).

a) Évaluer la différence de pression entre les points *M* et *N*.

b) En déduire la vitesse de l'écoulement.
A.N. : $\rho_m = 13{,}6\text{x}10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $g = 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\Delta h = 1\ \text{cm}$.

4.6 Action d'un jet sur une plaque inclinée

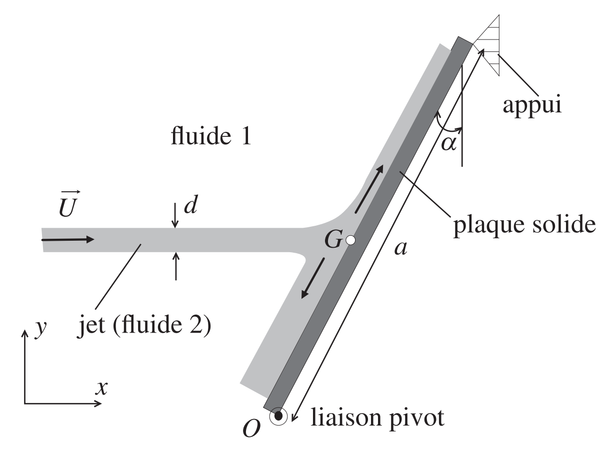


Figure 4.12

Un jet d'eau de section rectangulaire (hauteur d) vient frapper une plaque carrée de côté a faisant un angle α avec la direction du jet. La vitesse du jet est notée $\vec{U}$ et le jet vient frapper la plaque en son centre de gravité G.

À sa base la plaque est fixée par une liaison pivot parfaite lui permettant donc d'effectuer un mouvement de rotation autour de l'axe perpendiculaire au plan.

1. Donner l'expression de la résultante R des efforts appliqués par le fluide sur la plaque.

2. Déterminer le point d'application P de cette résultante (on admettra que les épaisseurs de films d'eau sont très petites devant le côté de la plaque).

3. Quelle est l'expression de la force F que l'on doit appliquer perpendiculairement à l'extrémité de la plaque pour la maintenir en équilibre ?

Hypothèses : l'écoulement du fluide est incompressible ; le fluide se comporte comme un fluide parfait ; on néglige le poids du fluide devant les efforts de pression. La vitesse et la pression sont supposées uniformes sur les sections d'écoulement.

4.7 Écoulement autour d'un profil d'aile

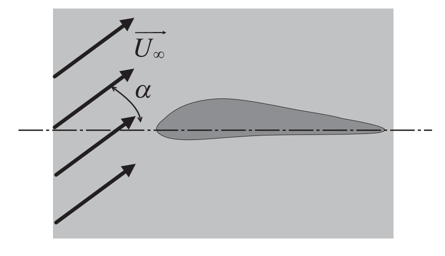


Figure 4.13

On considère un écoulement incompressible de fluide parfait à la vitesse $\overrightarrow{U_\infty}$. Le fluide s'écoule autour d'un profil d'aile. L'écoulement fait un angle α par rapport à l'axe horizontal.

1. Déterminer un volume de contrôle judicieux en regard de la configuration de l'écoulement.

2. En utilisant le bilan de quantité de mouvement, le bilan de masse et la relation de *Bernoulli*, exprimer la force résultante exercée par le fluide sur le solide.

3. Exprimer cette résultante en fonction de la circulation Γ du fluide le long du volume de contrôle et de U_∞.

4.8 Propulsion

On considère un propulseur qui éjecte des gaz au travers de la surface A_s à la vitesse U_s, relativement au propulseur, et la pression sur A_s est notée p_s. On notera que cette pression est différente de la pression atmosphérique alors que le gaz se retrouve à l'air ambiant en sortie du propulseur.

Calculer les forces de poussée et de traînée exercées sur le propulseur.

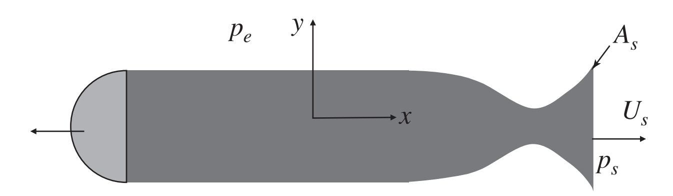


Figure 4.14

Solutions

4.1 On se place dans le référentiel du sous-marin et l'eau s'écoule autour de lui. Considérons la ligne de courant MA. Le point A est un point d'arrêt où la ligne de courant va se diviser pour suivre le profil du sous-marin. Donc la vitesse au point A est nulle. Comme, d'autre part, les points A et M sont à la même altitude, l'écriture de la relation de Bernoulli entre les points A et M conduit à :

$$P_M + \frac{1}{2}\rho U_M^2 = P_A$$

La pression au point *M* est obtenue par application de la relation de l'hydrostatique :

$$P_M = P_0 + \rho g z_M$$

En combinant les deux équations précédentes, on obtient finalement :

$$P_A = P_0 + \rho g z_M + \frac{1}{2}\rho U_M^2$$

L'application numérique donne : $P_A = 3{,}1\,\text{bar}$.

4.2 Considérons la ligne de courant joignant les points M et A et appliquons la relation de Bernoulli entre ces 2 points :

$$P_M + \rho g z_M + \frac{1}{2}\rho U_M^2 = P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho U_A^2 \qquad (4.48)$$

Le réservoir est de très grandes dimensions devant l'orifice d'évacuation de l'eau et nous pouvons donc supposer que la vitesse du point *M* est très petite devant celle de *A*. D'autre part, le point *M* étant sur la surface libre, la pression y est égale à la pression atmosphérique : $P_M = P_{atm}$ et au point *A* l'écoulement dans l'air ambiant étant à droites parallèles la pression est aussi égale à la pression atmosphérique : $P_A = P_{atm}$.

On en déduit donc que la relation (4.48) conduit à :

$$U_A = \sqrt{2 g z_M}$$

Cette relation constitue la formule de *Toricelli*. Notons bien que la hauteur z_M dépend bien du temps puisque le niveau de la surface libre diminue au fur et à mesure que le liquide s'écoule.

Pour calculer le temps de vidange de la cuve, nous calculons dans un premier temps le débit volume au niveau de l'orifice de sortie :

$$Q_v = U_A s = s\sqrt{2 g z_M(t)} \qquad (4.49)$$

Comme l'écoulement est incompressible, il y a conservation du débit et son calcul à partir de la section de la cuve conduit avec la relation (4.49) à :

$$Q_v = s\sqrt{2 g z_M(t)} = U_M S = -\frac{\mathrm{d}z_M}{\mathrm{d}t} S$$

Nous intégrons la relation précédente depuis l'instant initial jusqu'à l'instant *T* où la cuve est complètement vide ($z_M = 0$) :

$$\int_{z_M}^{0} -\frac{\mathrm{d}z_M}{\sqrt{z_M(t)}} = \int_{0}^{T} -\frac{s\sqrt{2g}}{\mathrm{S}}\mathrm{d}t$$

Ce calcul conduit à :

$$-2\sqrt{z_M(t)} = -\frac{s\sqrt{2g}}{\mathrm{S}} T$$

D'où l'expression du temps total de vidange :

$$T = \frac{2\sqrt{z_M(t)}\,\mathrm{S}}{s\sqrt{2g}}$$

Application numérique : *T*~1h 46 mn 25 s.

4.3 Considérons la ligne de courant joignant les points A et B. Il n'y a pas conservation de l'énergie sur cette ligne de courant étant donné que le fluide a communiqué du travail à la turbine. Ceci implique que la relation de Bernoulli s'écrive :

$$\left[\frac{P_A}{\rho g} + z_A + \frac{1}{2g}U_A^2\right] - \left[\frac{P_B}{\rho g} + z_B + \frac{1}{2g}U_B^2\right] = H_T$$

Dans cette relation H_T désigne l'énergie perdue entre les points A et B et exprimée en hauteur de fluide. Calculons les vitesses aux points A et B :

$$U_A = \frac{4Q_v}{\pi d_A^2} = 3{,}027\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

$$U_B = \frac{4Q_v}{\pi d_B^2} = 0{,}756\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

On en déduit :

$$H_T = 20\,\mathrm{m}$$

La puissance reçue par la turbine s'exprime enfin comme :

$$P_T = \rho g Q_v H_T$$

L'application numérique conduisant à : $P_T = 41{,}96\,\mathrm{kW}$.

4.4 La démarche est très comparable à celle de l'exercice précédent, la différence étant que de l'énergie est fournie par la pompe au fluide. Ainsi si l'on considère la ligne de courant passant par les points 1 et 2, la relation de Bernoulli s'écrit :

$$-\left[\frac{P_1}{\rho g} + z_1 + \frac{1}{2g}U_1^2\right] + \left[\frac{P_2}{\rho g} + z_2 + \frac{1}{2g}U_2^2\right] = H_P \qquad (4.50)$$

Or, 20 cm de mercure correspondent à une élévation de 2,72 m d'eau (en effet, $h_{\text{eau}} = h_{Hg}\,\rho_{Hg}/\rho_{\text{eau}}$), donc nous pouvons exprimer les pressions aux points 1 et 2 en bars :

$$P_1 = P_0 - \rho_{eau}\, g\, h_{eau}^1 = 0{,}73 \text{ bar}$$

$$P_2 = P_0 + \rho_{eau}\, g\, h_{eau}^2 = 1{,}68 \text{ bar}$$

Calculons les vitesses aux points 1 et 2 :

$$U_1 = \frac{4Q_v}{\pi d_1^2} = 2{,}12\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

$$U_2 = \frac{4Q_v}{\pi d_2^2} = 4{,}77\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

En remplaçant ces valeurs dans la relation (4.50), on obtient : $H_P = 11{,}8$ m.

La puissance nécessaire pour le fonctionnement de la pompe est :

$$P_P = \rho g Q_v H_P = 17{,}36 \text{ kW}$$

La prise en compte du rendement de la pompe conduit finalement à la puissance mécanique : $P_{méca} = P_P \,/\, \eta = 21{,}7$ kW.

4.5

1. Écrivons la relation de *Bernoulli* sur la ligne de courant joignant les points A et B :

$$\left[\frac{P_A}{\rho g} + z_A + \frac{1}{2g}U_A^2\right] - \left[\frac{P_B}{\rho g} + z_B + \frac{1}{2g}U_B^2\right] = 0 \qquad (4.51)$$

A étant un point d'arrêt sa vitesse est nulle et d'autre part, on peut faire l'hypothèse que les 2 points sont sensiblement à la même altitude puisque nous considérons un diamètre du tube petit. Ainsi la relation (4.51) devient :

$$P_A - P_B = \frac{\rho}{2} U_B^2$$

2a. La relation de l'hydrostatique permet de lier les pressions aux points M et N :

$$P_M + \rho_{\mathrm{Hg}}\, g\, z_M = P_N + \rho_{\mathrm{Hg}}\, g\, z_N$$

Soit, comme $P_M - P_N = P_A - P_B$:

$$P_A - P_B = \rho_{\mathrm{Hg}}\, g\, \Delta h \qquad (4.52)$$

2b. En utilisant la relation (4.52), on trouve

$$\rho_{\mathrm{Hg}}\, g\, \Delta h = \frac{\rho}{2} U_B^2$$

D'où l'expression de la vitesse au point B :

$$U_B = \sqrt{\frac{\rho_{\mathrm{Hg}}}{\rho} 2 g \Delta h}$$

Application numérique : $U_B = 46{,}7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

4.6

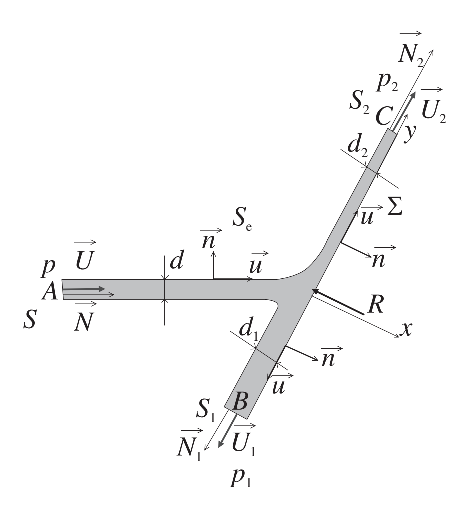


Figure 4.15

1. Nous isolons un volume de contrôle fluide délimité par la surface ($S + S_e + S_1 + S_2 + \Sigma$) sur lequel nous appliquons le bilan de masse et de quantité de mouvements. Comme le vecteur vitesse est perpendiculaire à la normale des surfaces Σ et S_e, le bilan de masse s'écrit :

$$\int_S \rho\, \vec{u} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}A + \int_{S_1} \rho\, \vec{u} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}A + \int_{S_2} \rho\, \vec{u} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}A + \underbrace{\int_{\Sigma} \rho\, \vec{u} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}A}_{=0} + \underbrace{\int_{S_e} \rho\, \vec{u} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}A}_{=0} = 0$$

Soit : $$-\rho U S + \rho U_1 S_1 + \rho U_2 S_2 = 0$$

Donc :

$$U S = U_1 S_1 + U_2 S_2 \tag{4.53}$$

La relation de *Bernoulli* entre les points A et B donne (en supposant le fluide non pesant) :

$$P_0 + \rho \frac{U^2}{2} = P_0 + \rho \frac{U_1^2}{2}$$

De même la relation de *Bernoulli* entre les points A et C donne :

$$P_0 + \rho \frac{U^2}{2} = P_0 + \rho \frac{U_2^2}{2}$$

On en déduit que : $$U = U_1 = U_2$$

En utilisant ce résultat dans la relation (4.53), on obtient :

$$S = S_1 + S_2$$

Soit encore :

$$d = d_1 + d_2$$

Le bilan de quantité de mouvement s'écrit :

$$\int_A \rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) \mathrm{d}S = -\int_A P \vec{n} \, \mathrm{d}S$$

Soit :

$$\int_S \rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) \mathrm{d}S + \int_{S_1} \rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) \mathrm{d}S + \int_{S_2} \rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) \mathrm{d}S + \underbrace{\int_\Sigma \rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) \mathrm{d}S}_{=0} + \underbrace{\int_{S_e} \rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) \mathrm{d}S}_{=0} \tag{4.54}$$

$$= -\int_S P \vec{n} \, \mathrm{d}S - \int_{S_1} P \vec{n} \, \mathrm{d}S - \int_{S_2} P \vec{n} \, \mathrm{d}S - \int_\Sigma P \vec{n} \, \mathrm{d}S - \int_{S_e} P \vec{n} \, \mathrm{d}S$$

Or :

$$-\int_\Sigma P \vec{n} \, \mathrm{d}S = -\int_\Sigma P_0 \vec{n} \, \mathrm{d}S - \int_\Sigma (P - P_0) \vec{n} \, \mathrm{d}S$$

Et comme la pression sur S, S_1, S_2 et S_e est égale à la pression atmosphérique p_0 et que d'autre part sur un contour fermé :

$$\int_{S+S_1+S_2+\Sigma+S_e} P_0 \vec{n} \, \mathrm{d}S = 0$$

La relation (4.54) devient :

$$-\rho U^2 S \overrightarrow{N} + \rho U_1^2 S_1 \overrightarrow{N_1} + \rho U_2^2 S_2 \overrightarrow{N_2} = -\int_\Sigma (P - P_0) \vec{n} \mathrm{d}S = \overrightarrow{R} \tag{4.55}$$

où $\overrightarrow{R}$ est la réaction de la plaque à l'action du jet. On en déduit donc que l'action du fluide sur la plaque est $-\overrightarrow{R}$.

La projection de la relation (4.55) sur l'axe $(O\vec{y})$ donne :

$$-\rho U^2 S \sin\alpha + \rho U_1^2 S_1 - \rho U_2^2 S_2 = 0$$

Ce qui conduit à :

$$d \sin\alpha + d_1 - d_2 = 0$$

Soit :

$$d_1 = \frac{1 - \sin\alpha}{2} d \text{ et } d_2 = \frac{1 + \sin\alpha}{2} d$$

La projection sur l'axe $\vec{x}$ de la relation (4.55) donne :

$$\rho U^2 S \sin\alpha = R$$

2. Pour déterminer le point d'application P de la résultante des efforts, on applique le théorème du moment résultant en P. En admettant que les épaisseurs de film d'eau sont très petites devant le côté de la plaque on obtient :

$$-\rho U^2 S \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{N} + \rho U_1^2 S_1 \underbrace{\overrightarrow{PB} \wedge \overrightarrow{N_1}}_{\sim \vec{0}} + \rho U_2^2 S_2 \underbrace{\overrightarrow{PC} \wedge \overrightarrow{N_2}}_{\sim \vec{0}} = \underbrace{\overrightarrow{PP} \wedge \overrightarrow{R}}_{= \vec{0}}$$

Soit :

$$-\rho U^2 S \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{N} = \vec{0}$$

Ceci implique que la résultante est appliquée au point G de la plaque placé sur l'axe du jet.

3. En isolant cette fois-ci la plaque et en appliquant le théorème du moment au point O, on obtient :

$$\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{-R} + \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} = \vec{0}$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a/2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\rho U^2 S \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Soit :

$$F_x = \frac{\rho U^2 S \sin\alpha}{2}$$

4.7

1. Nous appliquons le bilan de quantité de mouvement sur le volume de contrôle que nous choisissons judicieusement en fonction de la direction de l'écoulement et qui est représenté sur la figure ci-dessous. Le volume de contrôle est choisi dans la direction de l'écoulement pour que le produit scalaire de la vitesse avec la normale à la surface Σ soit nul (voir figure ci-dessous).

Nous considérons que les sections S_1 et S_2 respectivement d'entrée et de sortie sont égales et placées suffisamment loin du solide pour considérer que la pression et la vitesse y sont uniformes. Nous notons a la hauteur des sections d'entrée et de sortie. Nous notons U_1

et P_1 respectivement la vitesse et la pression sur S_1 et U_2 et P_2 respectivement la vitesse et la pression sur S_2.

2. Le bilan de quantité de mouvement s'écrit ($\vec{n}$ est la normale sortante en tout point de la surface S de contrôle) :

$$\int_S \rho\,\vec{u}(\vec{u}.\vec{n})\,\mathrm{d}S = -\int_S P\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

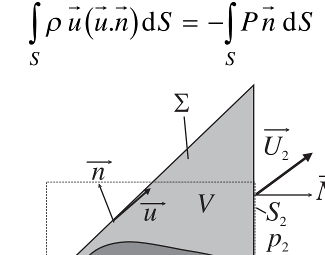
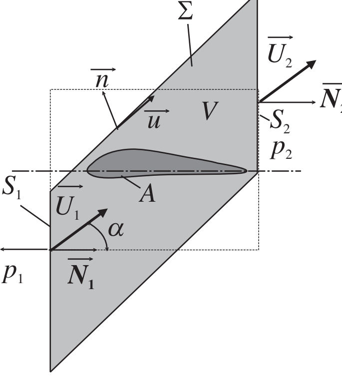



Figure 4.16

En décomposant ces deux intégrales (nous notons Σ la surface latérale et A la surface du profil d'aile) :

$$\begin{aligned}&\int_{S_1} \rho\,\vec{u}(\vec{u}.\vec{n})\mathrm{d}S + \int_{S_2} \rho\,\vec{u}(\vec{u}.\vec{n})\mathrm{d}S + \int_{\Sigma} \rho\,\vec{u}(\vec{u}.\vec{n})\mathrm{d}S + \int_{A} \rho\,\vec{u}(\vec{u}.\vec{n})\mathrm{d}S = \\ &-\int_{S_1} P\vec{n}\,\mathrm{d}S - \int_{S_2} P\vec{n}\,\mathrm{d}S - \int_{\Sigma} P\vec{n}\,\mathrm{d}S - \int_{A} P\vec{n}\,\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{4.56}$$

Cette décomposition fait apparaître la résultante des efforts exercés par le fluide sur le profil d'aile :

$$\vec{R} = \int_A P\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

Sur la surface A, la vitesse est perpendiculaire en tout point à la normale et donc $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$. C'est aussi le même résultat pour la surface Σ du fait de l'orthogonalité du vecteur vitesse avec la normale. Nous adoptons les notations suivantes pour les vitesses :

$$\overrightarrow{U_1} = \begin{pmatrix} u_{1_x} \\ u_{1_y} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{U_2} = \begin{pmatrix} u_{2_x} \\ u_{2_y} \end{pmatrix}$$

La pression et la vitesse étant considérées comme uniformes sur les sections S_1 et S_2, la relation (4.56) s'écrit alors :

$$-\rho S_1 \overrightarrow{U_1} u_{1_x} + \rho S_2 \overrightarrow{U_2} u_{2_x} = (p_1 + p_0) S_1 \overrightarrow{N_1} - (p_2 + p_0) S_2 \overrightarrow{N_2} - \int_{\Sigma} p_0\,\vec{n}\,\mathrm{d}S - \vec{R} \tag{4.57}$$

Dans cette relation P_0 est la pression statique que nous supposons constante sur le domaine étudié étant donné ses petites dimensions. Comme l'air ambiant à la pression P_0 est à l'équilibre, on doit avoir :

$$P_0 S_1 \overrightarrow{N_1} - P_0 S_2 \overrightarrow{N_2} - \int_{\Sigma} P_0 \vec{n}\, \mathrm{d}S = 0$$

Ainsi la relation (4.57) se simplifie sous la forme :

$$-\rho S_1 \overrightarrow{U_1} u_{1_x} + \rho S_2 \overrightarrow{U_2} u_{2_x} = P_1 S_1 \overrightarrow{N_1} - P_2 S_2 \overrightarrow{N_2} - \vec{R} \qquad (4.58)$$

En projection sur l'axe x, la relation (4.58) s'écrit :

$$-\rho S_1 u_{1_x}^2 + \rho S_2 u_{2_x}^2 = P_1 S_1 - P_2 S_2 - R_x \qquad (4.59)$$

En projection sur l'axe y, la relation (4.58) s'écrit :

$$-\rho S_1 u_{1_x} u_{1_y} + \rho S_2 u_{2_x} u_{2_y} = -R_y$$

La conservation de la masse sur V s'écrit (en tenant compte du fait que la normale et le vecteur vitesse sont perpendiculaires sur A et Σ) :

$$\int_S \rho\, \vec{u}.\vec{n}\, \mathrm{d}S = \int_{S_1} \rho\, \vec{u}.\vec{n}\, \mathrm{d}S + \int_{S_2} \rho\, \vec{u}.\vec{n}\, \mathrm{d}S + \underbrace{\int_{\Sigma} \rho\, \vec{u}.\vec{n}\, \mathrm{d}S}_{=0} + \underbrace{\int_{A} \rho\, \vec{u}.\vec{n}\, \mathrm{d}S}_{=0} = 0$$

Soit :

$$-\rho u_{1_x} S_1 + \rho u_{2_x} S_2 = 0$$

Comme $S_1 = S_2 = a$ (puisque l'écoulement est plan on peut donc raisonner par unité de largeur perpendiculaire à l'écoulement), on trouve donc :

$$u_{1_x} = u_{2_x} \qquad (4.60)$$

En remplaçant la relation (4.60) dans la relation (4.59) on trouve :

$$R_x = (P_1 - P_2)a$$

Et :

$$R_y = \rho a u_{1_x}\left(u_{1_y} - u_{2_y}\right) \qquad (4.61)$$

Nous pouvons exprimer R_x à partir des vitesses en utilisant la relation de *Bernoulli* :

$$P_1 + \rho\frac{U_1^2}{2} = P_2 + \rho\frac{U_2^2}{2}$$

Soit :

$$P_1 - P_2 = \frac{\rho}{2}(U_2^2 - U_1^2) = \frac{\rho}{2}\left(u_{2_x}^2 + u_{2_y}^2 - u_{1_x}^2 - u_{1_y}^2\right)$$

Comme $u_{1_x} = u_{2_x}$:

$$P_1 - P_2 = \frac{\rho}{2}\left(u_{2_y}^2 - u_{1_y}^2\right)$$

et donc :

$$R_x = \frac{\rho}{2}\left(u_{2_y}^2 - u_{1_y}^2\right)S \qquad (4.62)$$

3. Nous pouvons exprimer les composantes R_x et R_y en fonction de la circulation du vecteur vitesse le long de $ABCD$:

$$\Gamma = \oint_{ABCD} \vec{u}.\vec{\mathrm{d}l} = \int_{AB} \overrightarrow{U_1}.\vec{\mathrm{d}l} + \int_{BC} \vec{u}.\vec{\mathrm{d}l} + \int_{CD} \overrightarrow{U_2}.\vec{\mathrm{d}l} + \int_{DA} \vec{u}.\vec{\mathrm{d}l}$$

La circulation sur BC est la même que sur AD et c'est donc l'opposé de la circulation sur DA. Il reste donc :

$$\Gamma = -u_{1_y}\,\overline{AB} + u_{2_y}\,\overline{CD} = \left(u_{2_y} - u_{1_y}\right)a$$

Les relations (4.62) et (4.61) deviennent alors :

$$R_x = \frac{\rho}{2}\left(u_{2_y} + u_{1_y}\right)\Gamma$$

Et :

$$R_y = -\rho u_{1_x}\,\Gamma$$

Remarque : si on considère le vecteur $\vec{U} = (\overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2})/2 = \left(u_x = u_{1_x} \quad u_y = \left(u_{1_y} + u_{2_y}\right)/2\right)$

on voit que :

$$\vec{R} \cdot \vec{U} = \frac{\rho}{2}\left(u_{2_y} + u_{1_y}\right)\Gamma u_{1_x} - \frac{\rho}{2}\left(u_{2_y} + u_{1_y}\right)\Gamma u_{1_x} = 0$$

Donc la résultante est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{U_\infty}$. On voit d'autre part que les composantes de la résultante s'expriment à partir des composantes de $\overrightarrow{U_\infty}$:

$$R_x = \rho\Gamma u_y$$

$$R_y = -\rho u_x \Gamma$$

On en déduit donc que le module de la résultante s'exprime à partir du module de $\overrightarrow{U_\infty}$:

$$R = \rho\Gamma U_\infty$$

Remarque : rappelons que c'est le module par unité de largeur du profil d'aile.

4.8

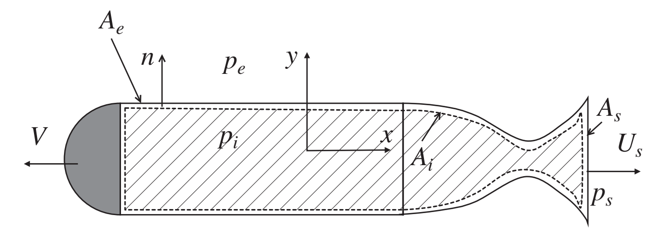


Figure 4.17

La poussée est la résultante des efforts de pression exercés par les gaz de combustion sur la surface interne A_i du propulseur :

$$\vec{P} = \int_{A_i} p_i \vec{n}\, \mathrm{d}S$$

La traînée est la résultante des efforts de pression exercés par le milieu ambiant sur la surface externe A_e du propulseur :

$$\vec{T} = \int_{A_e} p_e \vec{n}\, \mathrm{d}S$$

Appliquons le bilan de quantité de mouvement au volume de gaz compris dans le propulseur et délimité par la surface $A = A_i + A_\mathrm{s}$:

$$\int_A \rho\, \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n})\mathrm{d}S = -\int_A p\vec{n}\, \mathrm{d}S$$

La vitesse est perpendiculaire à la normale $\vec{n}$ sur la surface A_i et donc le produit scalaire est nul. Ceci conduit à :

$$\rho\overrightarrow{U_s} U_s\, A_s = -p_s\, A_s \vec{n} - \int_{A_i} p_i\, \vec{n}\, \mathrm{d}S$$

soit :

$$\rho U_s^2\, A_s \vec{x} = -p_s\, A_s \vec{x} - \vec{P}$$

On en déduit l'expression de la poussée :

$$\vec{P} = (\rho U_s^2 A_s + p_s\, A_s)\vec{x} = (Q_s U_s + p_s\, A_s)\vec{x}$$

où $Q_s = \rho U_s A_s$ est le débit masse à la sortie du propulseur.
La résultante des forces agissant sur le corps du propulseur est donc :

$$\vec{R} = M\vec{g} + (Q_s U_s + p_s\, A_s)\vec{x} - \int_{A_e} p_e \vec{n}\, \mathrm{d}S$$

Bibliographie

BLOOMER J. J., *Practical Fluid Mechanics for Engineering applications*, Marcel Dekker Inc. edition, 2000.

CANDEL S., *Mécanique des fluides*, DUNOD, 1990.

COMOLET R., *Mécanique expérimentale des fluides*, *Statique et dynamique des fluides non visqueux*, tome 1, DUNOD, Paris, 2002.

DESJARDINS D., COMBARNOUS M., BONNETON N., *Mécanique des fluides-Problèmes résolus avec rappels de cours*, DUNOD, Paris, 2002.

KUNDU P. K., COHEN I. M., *Fluid Mechanics*, Elsevier Academic Press, Third Edition, 2004.

MONAVON A., *Mini manuel de Mécanique des fluides*, DUNOD, Paris, 2010.

POTTER M. AND WIGGERT D. C., Fluid mechanics, *SCHAUM'S Outline Series*, McGRAW-HILL, New York, 2008.

5 Écriture locale des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie

PLAN

OBJECTIFS

- ➤ Démontrer les lois de transport
- ➤ Formuler les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie à l'échelle locale
- ➤ Retrouver le théorème de Bernoulli à partir des équations de conservation
- ➤ Injecter la loi de comportement des fluides visqueux dans le bilan de quantité de mouvement pour obtenir la relation de Navier-Stokes
- ➤ Utiliser l'approximation hydrodynamique pour avoir des solutions approchées de problèmes complexes d'écoulement visqueux

5.1 LOIS DE TRANSPORT

5.1.1 Introduction

Les *lois de transport* consistent à écrire le taux de variation à l'instant t d'une quantité scalaire ou vectorielle définie sur un volume matériel quelconque $\Omega(t)$ délimité par sa surface $\Gamma(t)$ d'un milieu fluide en écoulement. On appelle $u(t)$ la vitesse localisée sur l'interface $\Gamma(t)$ du volume matériel $\Omega(t)$. Ces théorèmes permettent d'écrire les équations de bilan pour la masse (quantité scalaire), la quantité de mouvement (quantité vectorielle) et l'énergie (quantité scalaire).

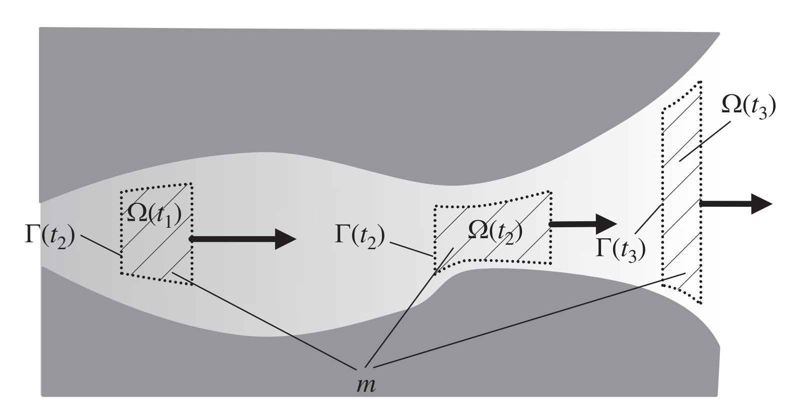


Figure 5.1 – **Évolution d'un volume matériel Ω(*t*) entre 3 instants différents au cours de l'écoulement du fluide dans une conduite de section variable en fonction de la longueur. Le volume matériel « s'adapte » de façon à conserver une masse identique à chaque instant.**

Signalons que nous adoptons ici le point de vue eulérien pour la description des mouvements des domaines matériels. Cela veut donc dire que nous suivons le volume fluide au cours du temps par rapport à un référentiel d'espace fixe. Contrairement à l'approche par volume de contrôle que nous avons étudiée au chapitre précédent, le *volume matériel* peut se déformer selon la géométrie de l'écoulement de façon à conserver le même volume à chaque instant (voir une illustration sur la Figure 5.1).

5.1.2 Application à une grandeur scalaire

Soit $f(\vec{x},t)$ une fonction définie sur le volume matériel $\Omega(t)$ de surface $\Gamma(t)$. Le taux de variation de l'intégrale de $f(\vec{x},t)$ sur $\Omega(t)$ est :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} f(\vec{x},t)\,\mathrm{d}V \tag{5.1}$$

Par définition de la dérivée cette quantité est équivalente à :

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{\Omega(t+\Delta t)} f(\vec{x},t+\Delta t)\,\mathrm{d}V - \int_{\Omega(t)} f(\vec{x},t)\,\mathrm{d}V\right] \tag{5.2}$$

La difficulté réside ici dans le fait que le domaine $\Omega(t)$ est en mouvement. Nous mettons en évidence les variables essentielles au calcul de la relation (5.2) sur l'illustration de la Figure 5.2.

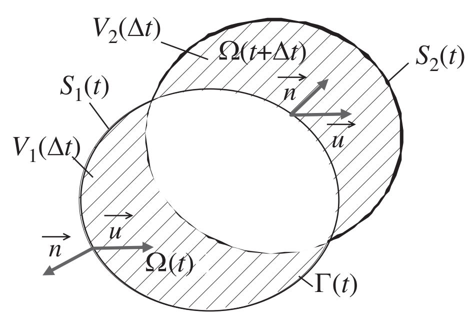


Figure 5.2 – **Évolution du volume de contrôle entre les instants *t* et *t* + Δ*t*.**

$V_1(\Delta t)$ et $V_2(\Delta t)$ sont les volumes balayés par la surface $\Gamma(t)$ et qui se retrouvent à l'instant $t + \Delta t$ respectivement à l'extérieur et à l'intérieur du volume de contrôle $\Omega(t + \Delta t)$. On note que :

$$\Omega(t + \Delta t) = \Omega(t) - V_1(\Delta t) + V_2(\Delta t).$$

$S_1(t)$ et $S_2(t)$ sont les surfaces qui balayent $V_1(\Delta t)$ et $V_2(\Delta t)$ respectivement. On note que $\Gamma(t) = S_1(t) + S_2(t)$. Ces deux surfaces sont séparées par une ligne sur laquelle on a : $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$. D'autre part on a $\vec{u} \cdot \vec{n} < 0$ sur $S_1(t)$ et on a $\vec{u} \cdot \vec{n} > 0$ sur $S_2(t)$.

D'après la Figure 5.2, on voit que l'on peut décomposer la relation sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} f(\vec{x},t)\,\mathrm{d}V = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\begin{array}{l}\underbrace{\int_{\Omega(t)} f(\vec{x},t+\Delta t)\,\mathrm{d}V}_{(1)} + \underbrace{\int_{V_2(\Delta t)} f(\vec{x},t+\Delta t)\,\mathrm{d}V}_{(2)} \\ -\underbrace{\int_{V_1(\Delta t)} f(\vec{x},t+\Delta t)\,\mathrm{d}V}_{(3)} - \underbrace{\int_{\Omega(t)} f(\vec{x},t)\,\mathrm{d}V}_{(4)}\end{array}\right] \tag{5.3}$$

D'autre part :

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[(1)-(4)] = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial f(\vec{x},t)}{\partial t}\,\mathrm{d}V \tag{5.4}$$

L'élément de volume $\mathrm{d}V_2$ balayé par l'élément de surface $\mathrm{d}S_2$ pendant l'intervalle de temps Δt est :

$$\mathrm{d}V_2 = (\vec{u}\cdot\vec{n}\,\Delta t)\,\mathrm{d}S_2 \tag{5.5}$$

Le volume 2 croît de la valeur $\mathrm{d}V_2$ pendant l'intervalle de temps Δt. $\vec{u}$ est la vitesse du volume matériel $\Omega(t)$ à la surface $\Gamma(t)$ de normale $\vec{n}$ $(\vec{u}\cdot\vec{n} > 0)$.

De même pour l'élément de surface $\mathrm{d}S_1$ (avec $\vec{n}\cdot\vec{u} < 0$) :

$$\mathrm{d}V_1 = -(\vec{u}\cdot\vec{n}\,\Delta t)\,\mathrm{d}S_1 \tag{5.6}$$

Le volume 1 croît de la quantité $\mathrm{d}V_1$ pendant l'intervalle de temps Δt mais dans la direction opposée à $\vec{u}$.

Donc :

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\int_{V_2(\Delta t)} f(\vec{x},t+\Delta t)\,\mathrm{d}V - \int_{V_1(\Delta t)} f(\vec{x},t+\Delta t)\,\mathrm{d}V\right] \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\int_{S_2(t)} f(\vec{x},t+\Delta t)(\vec{u}\cdot\vec{n})\Delta t\,\mathrm{d}S + \int_{S_1(t)} f(\vec{x},t+\Delta t)(\vec{u}\cdot\vec{n})\Delta t\,\mathrm{d}S\right] \\
&= \lim_{\Delta t \to 0}\left[\int_{S_2(t)} f(\vec{x},t+\Delta t)(\vec{u}\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}S + \int_{S_1(t)} f(\vec{x},t+\Delta t)(\vec{u}\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}S\right] \\
&= \int_{\Gamma(t)} f(\vec{x},t)(\vec{u}\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}S
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Finalement, la relation (5.3) devient :

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} f(\vec{x},t)\,\mathrm{d}V}_{\left[\begin{array}{l}\text{taux de variation de}\\ \text{l'intégrale de } f \text{ sur } \Omega\end{array}\right]} = \underbrace{\int_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x},t)\,\mathrm{d}V}_{\left[\begin{array}{l}\text{intégrale sur } \Omega\\ \text{de la variation de } f\\ \text{par rapport au temps}\end{array}\right]} + \underbrace{\int_{\Gamma(t)} f(\vec{x},t)\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S}_{\left[\begin{array}{l}\text{flux de } f \text{ à travers}\\ \text{la surface } \Gamma\end{array}\right]} \tag{5.8}$$

En utilisant le théorème de la divergence pour la deuxième intégrale du second membre on obtient la relation équivalente suivante :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} f(\vec{x},t)\,\mathrm{d}V = \int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x},t) + \vec{\nabla}\cdot\left(f(\vec{x},t)\,\vec{u}\right)\right)\mathrm{d}V} \tag{5.9}$$

Cette relation constitue le *théorème de Reynolds.*

5.1.3 Application à une grandeur vectorielle

Appliquons la méthode précédente à la grandeur vectorielle $\int_{\Omega(t)} \vec{g}(\vec{x},t)\,\mathrm{d}V$. Nous projetons $\vec{g}(\vec{x},t)$ sur le système d'axes utilisé (cartésien, cylindrique ou sphérique) :

$$\vec{g}(\vec{x},t) = g_1(\vec{x},t)\vec{e}_1 + g_2(\vec{x},t)\vec{e}_2 + g_3(\vec{x},t)\vec{e}_3 \tag{5.10}$$

On applique alors la relation (5.8) à chaque composante scalaire de la projection :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} \vec{g}(\vec{x},t)\,\mathrm{d}V = \vec{e}_1 \int_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial t} g_1(\vec{x},t)\,\mathrm{d}V + \vec{e}_1 \int_{\Gamma(t)} g_1(\vec{x},t)\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S + \vec{e}_2 \int_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial t} g_2(\vec{x},t)\,\mathrm{d}V$$
$$+\vec{e}_2 \int_{\Gamma(t)} g_2(\vec{x},t)\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S + \vec{e}_3 \int_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial t} g_3(\vec{x},t)\,\mathrm{d}V + \vec{e}_3 \int_{\Gamma(t)} g_3(\vec{x},t)\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S \quad (5.11)$$

Soit :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} \vec{g}(\vec{x},t)\,\mathrm{d}V = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial t}\vec{g}(\vec{x},t)\,\mathrm{d}V + \int_{\Gamma(t)} \vec{g}(\vec{x},t)(\vec{u}\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}S} \quad (5.12)$$

5.2 Forme locale des équations de conservation

5.2.1 Conservation de la masse

Cette loi traduit le fait que la variation de masse m du volume matériel $\Omega(t)$ au cours du temps est nulle s'il n'y a pas de terme source ou puits en son sein. Ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} \rho\,\mathrm{d}V = 0 \quad (5.13)$$

où ρ est la masse volumique.

En appliquant le théorème de transport à la relation (5.8), on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} \rho\,\mathrm{d}V = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \int_{\Gamma(t)} \rho\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S \quad (5.14)$$

Remarque

En régime permanent, lorsque le volume matériel $\Omega(t)$ coïncide avec le volume de contrôle V, on retrouve la relation (4.25) du bilan macroscopique de masse obtenu au chapitre 4.

En utilisant le théorème de la divergence, l'équation (5.14) s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} \rho\,\mathrm{d}V = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial t}\rho\,\mathrm{d}V + \int_{\Omega(t)} \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u})\,\mathrm{d}V \quad (5.15)$$

Étant donné que le volume matériel est choisi arbitrairement, on peut étendre la relation (5.15) à l'ensemble du milieu continu. On aboutit donc à la relation fondamentale :

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\,\vec{u}) = 0} \quad (5.16)$$

On retrouve l'*équation de conservation de la masse* (ECM) ou *équation de continuité* démontrée aussi au chapitre 1.

Remarque

En utilisant la définition de la dérivée particulaire, on peut exprimer la relation (5.16) sous la forme équivalente :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\,\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0} \tag{5.17}$$

Cas particuliers

Lorsque l'écoulement est permanent alors la dérivée partielle de la masse volumique par rapport au temps est nulle et d'après (5.16) l'ECM se résume à :

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\rho\,\vec{u}\right) = \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\rho + \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$$

Si, d'autre part, l'écoulement est incompressible alors la masse volumique est constante tout le domaine d'écoulement et donc : $\vec{\nabla}\rho = 0$. Dans ce cas l'ECM devient :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$$

Cette relation correspond bien à un écoulement incompressible et stationnaire.

Le débit masse de fluide au travers d'un tube de courant de section A et de normale $\vec{n}$ est défini par :

$$Q_m = \int_A \rho\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S \tag{5.18}$$

S'il y a conservation de la masse dans le tube alors il y a conservation du débit.

5.2.2 Conservation de la quantité de mouvement

Cette loi traduit l'équation fondamentale de la dynamique, à savoir que le taux de variation de la quantité de mouvement associée au volume matériel $\Omega(t)$ est égal à la somme des forces extérieures agissant sur $\Omega(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} \rho\,\vec{u}\,\mathrm{d}V = \vec{F_e} \tag{5.19}$$

Les forces extérieures agissant sur $\Omega(t)$ sont :

- le poids du volume de fluide : $\int_{\Omega(t)} \rho\,\vec{g}\,\mathrm{d}V$
- les forces agissant sur la surface $\Gamma(t)$ que l'on écrit sous la forme $\int_{\Gamma(t)} \overrightarrow{T\left(\vec{n}\right)}\,\mathrm{d}S$, où $\vec{n}$ est la normale extérieure à $\Gamma(t)$.

On décompose classiquement la contrainte $\vec{T}$ en une contrainte liée aux forces de pression et une contrainte liées aux effets visqueux. Soit :

$$\int_{\Gamma(t)} \overrightarrow{T\left(\vec{n}\right)}\,\mathrm{d}S = \int_{\Gamma(t)} \overline{\overline{\sigma}}\,\vec{n}\,\mathrm{d}S \tag{5.20}$$

$\overline{\overline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes. On note $\overline{\overline{s}}$ le déviateur des contraintes défini par : $\overline{\overline{s}} = \overline{\overline{\sigma}} - \mathrm{trace}\left(\overline{\overline{\sigma}}\right)/3 = \overline{\overline{\sigma}} + p\overline{\overline{I}}$ où $\overline{\overline{I}}$ est la matrice identité. En utilisant le théorème de transport pour une grandeur vectorielle (relation 5.12) on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} \rho\,\vec{u}\,\mathrm{d}V = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial(\rho\,\vec{u})}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \int_{\Gamma(t)} (\rho\,\vec{u})\vec{u}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S \tag{5.21}$$

Soit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} \rho\,\vec{u}\,\mathrm{d}V = \int_{\Omega(t)} \left(\vec{u}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right)\mathrm{d}V + \int_{\Gamma(t)} (\rho\,\vec{u})\vec{u}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S \tag{5.22}$$

En utilisant le théorème de la divergence, l'équation de continuité et la définition de la dérivée particulaire, la relation (5.22) se met sous la forme :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} \rho\,\vec{u}\,\mathrm{d}V &= \int_{\Omega(t)} \left[\left(\vec{u}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right) + \vec{\nabla}\cdot\left(\rho\,\vec{u}\,\vec{u}\right)\right]\mathrm{d}V \\ &= \underbrace{\int_{\Omega(t)} \vec{u}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\,\vec{u})\right)\mathrm{d}V}_{=0\,(\mathrm{ECM})} + \int_{\Omega(t)} \underbrace{\rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{u}\right)}_{\rho\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}}\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{5.23}$$

Soit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} \rho\,\vec{u}\,\mathrm{d}V = \int_{\Omega(t)} \rho\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}V \tag{5.24}$$

Finalement l'équation de *conservation de la quantité de mouvement* s'écrit :

$$\boxed{\int_{\Omega(t)} \rho\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}V = \int_{\Omega(t)} \rho\,\vec{g}\,\mathrm{d}V + \int_{\Gamma(t)} \overline{\overline{\sigma}}\,\vec{n}\,\mathrm{d}S} \tag{5.25}$$

Remarque

En régime permanent lorsque le volume matériel $\Omega(t)$ coïncide avec le volume de contrôle V, on retrouve le théorème de quantité de mouvement (relation (4.37)) du bilan macroscopique de quantité de mouvements lorsque le fluide est parfait ($\overline{\overline{s}} = \overline{\overline{0}}$).

En utilisant les théorèmes du gradient et de la divergence nous pouvons remplacer l'intégrale sur la surface par une intégrale sur le volume :

$$\int_{\Omega(t)} \rho\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}V = \int_{\Omega(t)} \left(\rho\,\vec{g} + \vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{\sigma}}\right)\mathrm{d}V \tag{5.26}$$

Cette relation étant valable pour tout $\Omega(t)$ à n'importe quel instant t, on obtient la forme locale de conservation de quantité de mouvement :

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\vec{u}\right) = \rho\,\vec{g} + \vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{\sigma}}} \tag{5.27}$$

Remarque

Pour chaque composante, la relation (5.27) s'écrit sous forme indicielle :

$$\rho \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = \rho\, g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \tag{5.28}$$

5.2.3 Conservation du moment de quantité de mouvement

La deuxième équation du principe fondamental de la dynamique indique que le moment de la quantité de mouvement est égal à la somme des moments des efforts. Soit donc, en fonction des notations précédentes, le moment en un point O est :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega(t)} \overrightarrow{OM} \wedge \rho\, \vec{u}\, \mathrm{d}V = \int_{\Omega(t)} \overrightarrow{OM} \wedge \rho\, \vec{g}\, \mathrm{d}V + \int_{\Gamma(t)} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{T(\vec{n})}\, \mathrm{d}S \tag{5.29}$$

Dans cette relation M désigne un point courant du volume ou de la surface concernée. La première intégrale se simplifie comme précédemment en utilisant la conservation de la masse (et avec $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}/\mathrm{d}t \wedge \vec{u} = \vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$) :

$$\int_{\Omega(t)} \overrightarrow{OM} \wedge \rho \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}V = \int_{\Omega(t)} \overrightarrow{OM} \wedge \rho\, \vec{g}\, \mathrm{d}V + \int_{\Gamma(t)} \overrightarrow{OM} \wedge \overline{\overline{\sigma}}\, \vec{n}\, \mathrm{d}S \tag{5.30}$$

On cherche $\overline{X}$ tel que :

$$\int_{\Gamma(t)} \overrightarrow{OM} \wedge \overline{\overline{\sigma}}\, \vec{n}\, \mathrm{d}S = \int_{\Omega(t)} \vec{\nabla} \cdot \overline{X}\, \mathrm{d}V \tag{5.31}$$

En utilisant la notation simplifiée de Einstein, chaque composante de $\nabla \cdot \overline{X}$ s'écrit :

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \overline{X}\right)_i = \frac{\partial X_{ir}}{\partial x_r} \tag{5.32}$$

Et en utilisant le coefficient de permutation δ_{ipq} :

$$\left(\overrightarrow{OM} \wedge \overline{\overline{\sigma}}\, \vec{n}\right)_i = \delta_{ipq}\, x_p\, \sigma_{qr}\, n_r \tag{5.33}$$

On a alors (avec le théorème du gradient) :

$$\frac{\partial X_{ir}}{\partial x_r} = \delta_{ipq} \frac{\partial}{\partial x_r}\left(x_p\, \sigma_{qr}\right) = \delta_{ipq}\left(x_p \frac{\partial \sigma_{qr}}{\partial x_r} + \delta_{pr}\, \sigma_{qr}\right) = \delta_{ipq}\left(x_p \frac{\partial \sigma_{qr}}{\partial x_r} + \sigma_{qp}\right) \tag{5.34}$$

On reconnaît :

$$\vec{\nabla} \cdot \overline{X} = \overline{\overline{\overline{\delta}}} : \overline{\overline{\sigma}} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\sigma}} \tag{5.35}$$

Finalement on obtient sous forme locale :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} \wedge \rho \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge \rho \vec{g} + \overline{\overline{\overline{\delta}}} : \overline{\overline{\sigma}} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\sigma}}} \tag{5.36}$$

Lorsque le tenseur des contraintes est symétrique, le terme $\overline{\overline{\overline{\delta}}} : \overline{\overline{\sigma}} = 0$.

5.3 Conservation de l'énergie

5.3.1 Conservation de l'énergie totale

Cette loi traduit la *conservation de l'énergie totale*, interne et cinétique, du volume matériel $\Omega(t)$ au cours du temps. En notant e l'énergie interne massique et u la vitesse cela conduit à écrire le taux de variation de l'énergie totale sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} \rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right)\mathrm{d}V = \dot{W} + \dot{Q} \tag{5.37}$$

Dans cette relation $\dot{W}$ désigne la puissance des forces extérieures :

$$\dot{W} = \int_{\Omega(t)} \rho\vec{g}\cdot\vec{u}\,\mathrm{d}V + \int_{\Gamma(t)} \overrightarrow{T(\vec{n})}\cdot\vec{u}\,\mathrm{d}S \tag{5.38}$$

S'il n'y a pas de source interne de chaleur alors la puissance calorifique est égale au flux de chaleur au travers de la surface $\Gamma(t)$:

$$\dot{Q} = -\int_{\Gamma(t)} \vec{\varphi}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S \tag{5.39}$$

où $\vec{\varphi}$ est la densité de flux de chaleur par conduction à travers $\Gamma(t)$.

En associant le théorème de transport à la relation de continuité, puis en appliquant la définition de la dérivée particulaire, on trouve :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} \rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right)\mathrm{d}V = \int_{\Omega(t)} \rho\frac{\partial}{\partial t}\left(e + \frac{u^2}{2}\right) + \vec{\nabla}\cdot\left(\rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right)\vec{u}\right)\mathrm{d}V \tag{5.40}$$

En remplaçant l'expression de $\vec{T}(\vec{n})$ par la relation (5.20) :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(t)} \rho\frac{\partial}{\partial t}\left(e + \frac{u^2}{2}\right) + \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{u}\rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right)\right)\mathrm{d}V &= \int_{\Omega(t)} \rho\vec{g}\cdot\vec{u}\,\mathrm{d}V \\ &+ \int_{\Gamma(t)} \bar{\bar{\sigma}}\vec{n}\cdot\vec{u}\,\mathrm{d}S - \int_{\Gamma(t)} \vec{\varphi}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{5.41}$$

Le volume matériel étant arbitraire et avec le théorème de la divergence, on obtient la relation de conservation de l'énergie à l'échelle locale :

$$\boxed{\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(e + \frac{u^2}{2}\right) + \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{u}\rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right)\right) = \rho\vec{g}\cdot\vec{u} + \vec{\nabla}\cdot\left(\bar{\bar{\sigma}}\cdot\vec{u}\right) - \vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi}} \tag{5.42}$$

5.3.2 Conservation de l'énergie cinétique

En multipliant par u chaque terme de la loi de conservation de la quantité de mouvement, on obtient :

$$\rho\,\vec{u}\,\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\vec{g}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\cdot\bar{\bar{\sigma}} \tag{5.43}$$

soit :

$$\boxed{\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{u^2}{2}\right) = \rho\, \vec{g} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{\sigma}}} \tag{5.44}$$

Cette relation traduit la *conservation de l'énergie cinétique* à l'échelle locale.

5.3.3 Conservation de l'énergie interne

En retranchant de l'équation (5.42) l'expression de la relation de conservation de l'énergie cinétique , on obtient la relation de *conservation de l'énergie interne* :

$$\rho \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \vec{\nabla} \cdot \left(\bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{u}\right) - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{\sigma}} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi} \tag{5.45}$$

Soit :

$$\rho \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{\nabla}}\vec{u} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi} \tag{5.46}$$

Or le tenseur des vitesses de déformation est défini par :

$$\bar{\bar{\dot{\varepsilon}}} = \frac{1}{2}\left(\bar{\bar{\nabla}}\vec{u} +^T \bar{\bar{\nabla}}\vec{u}\right) \tag{5.47}$$

Et le tenseur des vitesses de rotation par :

$$\bar{\bar{R}} = \frac{1}{2}\left(\bar{\bar{\nabla}}\vec{u} -^T \bar{\bar{\nabla}}\vec{u}\right) \tag{5.48}$$

Donc :

$$\bar{\bar{\nabla}}\vec{u} = \bar{\bar{\dot{\varepsilon}}} + \bar{\bar{R}} \tag{5.49}$$

Et donc :

$$\bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{\nabla}}\vec{u} = \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{\dot{\varepsilon}}} + \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{R}} = \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{\dot{\varepsilon}}} \tag{5.50}$$

Car le produit doublement contracté d'un tenseur symétrique avec un tenseur antisymétrique est nul. Finalement, la relation (5.46) s'écrit :

$$\boxed{\rho \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{\dot{\varepsilon}}} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi}} \tag{5.51}$$

5.4 Expression du théorème de Bernoulli

Nous proposons de retrouver l'expression du *théorème de Bernoulli* (déjà vu au chapitre 4) à partir des lois de conservation à l'échelle locale. Nous considérons un fluide parfait (sans effet de viscosité et donc $\bar{\bar{\sigma}} = -p\bar{\bar{I}}$), soit : $\bar{\bar{s}} = 0$. Sachant que l'accélération de la pesanteur dérive d'un potentiel : $\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi_g$, la relation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \bar{\bar{\nabla}}\vec{u}\right) = -\rho\, \vec{\nabla}\phi_g - \vec{\nabla}p \tag{5.52}$$

On utilise la relation vectorielle :

$$\vec{u} \cdot \overline{\overline{\nabla}}\vec{u} = \vec{\nabla}\frac{u^2}{2} + \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}\right) \wedge \vec{u} \tag{5.53}$$

Alors la relation (5.52) s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla}\frac{u^2}{2} + \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}\right) \wedge \vec{u} = -\vec{\nabla}\phi_g - \frac{\vec{\nabla}p}{\rho} \tag{5.54}$$

Si le fluide est incompressible, c'est-à-dire si ρ est constante, alors :

$$\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} = \vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}\right) \tag{5.55}$$

La relation (5.54) s'écrit alors :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \phi_g\right) + \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}\right) \wedge \vec{u} = 0 \tag{5.56}$$

Si l'écoulement est permanent on a :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0} \tag{5.57}$$

La relation (5.56) devient :

$$\vec{\nabla}\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \phi_g\right) + \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}\right) \wedge \vec{u} = \vec{0} \tag{5.58}$$

Nous introduisons le vecteur tourbillon que nous avons défini au chapitre 3 sous la forme :

$$\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} \tag{5.59}$$

La relation (5.58) devient :

$$\vec{\nabla}\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \phi_g\right) + \vec{\Omega} \wedge \vec{u} = \vec{0} \tag{5.60}$$

Projetons cette dernière relation sur une ligne de courant de vecteur unitaire $\overrightarrow{s_c}$:

$$\overrightarrow{s_c} \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \phi_g\right) + \overrightarrow{s_c} \cdot (2\vec{\omega} \wedge \vec{u}) = 0 \tag{5.61}$$

Comme $\overrightarrow{s_c}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires alors :

$$\overrightarrow{s_c} \cdot (2\vec{\omega} \wedge \vec{u}) = 0 \tag{5.62}$$

Finalement, avec :

$$\overrightarrow{s_c} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial s_c} \tag{5.63}$$

on trouve que :

$$\frac{\partial}{\partial s_c}\left(\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\phi_g\right)=0 \tag{5.64}$$

On trouve donc que le long d'une ligne de courant, la quantité entre parenthèses est une constante :

$$\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\phi_g = \text{constante} \tag{5.65}$$

Comme $\phi_g = gz$, on retrouve finalement le théorème de *Bernoulli* sur une ligne de courant :

$$\boxed{\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz = \text{constante}} \tag{5.66}$$

Cas des fluides barotropes

On peut obtenir une expression du théorème de Bernoulli dans le cas où l'écoulement est compressible. C'est le cas pour les fluides barotropes où la masse volumique ne dépend que de la pression : $\rho = \rho(p)$ (cas des gaz parfaits en évolution isotherme : $p = \rho r T$ ou bien isentropique : $p = \rho^\gamma \exp(s/C_v)$, où s est l'entropie massique). Dès lors, on peut écrire :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial s}\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)}=\frac{\partial h}{\partial s} \tag{5.67}$$

où h est l'enthalpie spécifique ou massique. Dans ce cas la relation (5.66) de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{u_s^2}{2}+h+zg = \text{constante} \tag{5.68}$$

Dans le cas d'un fluide parfait, l'évolution est nécessairement isentropique puisque les frottements visqueux n'existent pas et qu'il n'y a donc pas dissipation de chaleur. Dans ce cas, nous avons vu au chapitre 2 que le lien entre les variables d'état du fluide est tel que : $p/p_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma = (T/T_0)^{\gamma/(\gamma-1)}$.

Ceci conduit à :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)}=\frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0}\frac{1}{p^{1/\gamma}}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0}\frac{\partial\left(p^{1-\frac{1}{\gamma}}\right)}{\partial s} \tag{5.69}$$

On trouve donc :

$$h=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left(\frac{p}{\rho_0}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} \tag{5.70}$$

En utilisant la loi des gaz parfaits $p/\rho = rT$ dans la relation (5.70), on retrouve l'expression de l'enthalpie spécifique d'un gaz parfait sous la forme classique :

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} = \frac{\gamma r T}{\gamma - 1} = c_p T \tag{5.71}$$

5.5 Relation de Navier-Stokes

5.5.1 Tenseur des contraintes

Navier en 1823, et *Stokes*, plus tard, ont généralisé la loi de *Newton* au cas de déformations tridimensionnelles. Le tenseur des contraintes se décompose classiquement sous la forme d'une contribution spérique et d'un déviateur :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \underbrace{\overline{\overline{s}}}_{\text{déviateur}} - \underbrace{\overline{\overline{d}}}_{\text{partie sphérique}} \tag{5.72}$$

La partie sphérique est définie par :

$$\overline{\overline{d}} = \frac{\text{trace}(\overline{\overline{\sigma}})}{3}\overline{\overline{I}} = -p\overline{\overline{I}} \tag{5.73}$$

où p est la pression hydrostatique.

De manière générale, on admet une dépendance du déviateur des contraintes au tenseur des taux de déformation qui pour chaque composante du tenseur s'écrit sous la forme :

$$s_{ij} = M_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}_{kl} \tag{5.74}$$

On montre que la condition d'isotropie du fluide implique :

$$M_{ijkl} = a\,\delta_{ik}\,\delta_{jl} + b\,\delta_{il}\,\delta_{jk} + c\,\delta_{ij}\,\delta_{kl} \tag{5.75}$$

où a, b et c sont des constantes et $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon. La symétrie du tenseur des contraintes (que nous ne démontrerons pas ici) implique $s_{ij} = s_{ji}$ et donc $a = b$. On en déduit finalement :

$$s_{ij} = a\left(\dot{\varepsilon}_{ij} + \dot{\varepsilon}_{ji}\right) + c\,\dot{\varepsilon}_{ll}\,\delta_{ij} \tag{5.76}$$

On pose $a = \mu$ et $c = \lambda$ où μ est la viscosité dynamique et λ est un paramètre assimilable au coefficient de *Lamé* en élasticité linéaire. On voit que la relation (5.76) peut s'écrire sous la forme équivalente :

$$s_{ij} = \mu\left(\dot{\varepsilon}_{ij} + \dot{\varepsilon}_{ji} - \frac{\dot{\varepsilon}_{ll}}{3}\delta_{ij}\right) + \left(\lambda + \frac{\mu}{3}\right)\dot{\varepsilon}_{ll}\,\delta_{ij} \tag{5.77}$$

Soit, sous forme tensorielle :

$$\overline{\overline{s}} = 2\mu\left(\overline{\overline{\dot{\varepsilon}}} - \frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{u}}{3}\overline{\overline{I}}\right) + \left(\underbrace{\lambda + \frac{2\mu}{3}}_{\mu_V}\right)\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\;\overline{\overline{I}} \tag{5.78}$$

Le coefficient μ_V est appelé viscosité de volume car il est associé aux variations en volume du fluide.
La pression mécanique est la trace du déviateur des contraintes et il est donc défini par :

$$p' = p - \frac{\text{trace}(\overline{\overline{s}})}{3} \tag{5.79}$$

Soit, d'après la relation (5.78) :

$$p' = p - \frac{3\lambda + 2\mu}{3}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \tag{5.80}$$

On constate que les deux pressions seront égales si l'écoulement est incompressible ou si la viscosité en volume est nulle, c'est-à-dire $2\mu + 3\lambda = 0$ soit : $\lambda = -2\mu/3$. C'est ce que l'on appelle la condition de Stockes. Dans ce cas on trouve que la loi de comportement est :

$$\overline{\overline{s}} = 2\mu\left(\overline{\overline{\dot{\varepsilon}}} - \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{u}}{3}\overline{\overline{I}}\right) \tag{5.81}$$

5.5.2 Loi de comportement de Navier-Stokes

En négligeant la viscosité en volume, pour un fluide newtonien en écoulement incompressible, la relation (5.61) montre que loi de comportement lie le déviateur des contraintes au tenseur des vitesses de déformations sous la forme:

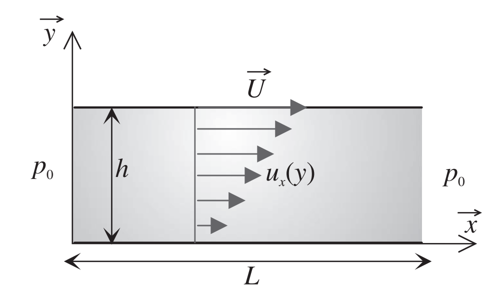
$$\overline{\overline{s}} = 2\,\mu\,\overline{\overline{\dot{\varepsilon}}} \tag{5.82}$$

avec :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{5.83}$$

Exercice : application à un écoulement simplement cisaillé

Déterminer l'expression du tenseur des contraintes en un point d'un fluide de viscosité dynamique μ où la pression hydrostatique est p, dans le cas de l'écoulement simplement cisaillé de la figure ci-dessous.



SOLUTION. On note $\dot{\gamma} = \mathrm{d}u_x/\mathrm{d}y$ le taux de cisaillement. Le champ de vitesses $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ dans l'écoulement simplement cisaillé est :

$$\begin{cases} u_x(y) = \dot{\gamma}\, y \\ u_y = 0 \\ u_z = 0 \end{cases}$$

Le tenseur des vitesses de déformation est :

$$\overline{\overline{\dot{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma}/2 & 0 \\ \dot{\gamma}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La loi de Newton donne l'expression du déviateur des contraintes :

$$\overline{\overline{s}} = \begin{bmatrix} 0 & \mu\dot{\gamma} & 0 \\ \mu\dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Enfin, on trouve l'expression du tenseur des contraintes :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -p & \mu\dot{\gamma} & 0 \\ \mu\dot{\gamma} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

5.5.3 Les équations de Navier-Stokes

Nous avons démontré au chapitre 5 l'expression du bilan de quantité de mouvement à l'échelle locale sous la forme de la relation :

$$\rho \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \overline{\overline{\nabla}}\vec{u}\right) = \rho\,\vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\sigma}} \tag{5.84}$$

En introduisant la loi de comportement pour un fluide newtonien, relation (5.81), dans la relation (5.84), on obtient pour chaque composante i :

$$\rho \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho\, g_i + 2\,\mu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{u}}{3}\delta_{ij}\right) \tag{5.85}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho\, g_i + \mu\,\Delta u_i + \mu \frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \frac{2\mu}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho\, g_i + \mu\,\Delta u_i + \frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \end{aligned} \tag{5.86}$$

Cette dernière relation constitue l'*équation de Navier-Stokes*. Lorsque le fluide est incompressible, alors :

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{5.87}$$

L'équation (5.86) devient dans ce cas :

$$\boxed{\rho \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho\, g_i + \mu\, \Delta u_i} \tag{5.88}$$

Explication du résultat de Trouton

Reprenons l'expérience de *Trouton* vue au chapitre 1. Lorsque l'on observe la déformation de l'éprouvette entre 2 instants consécutifs, on constate que le matériau s'allonge selon x et qu'il se rétrécit dans les directions y et z à vitesses identiques dans ces 2 directions. Ceci découle du fait que la masse du barreau doit rester constante au cours du temps. Le champ de vitesse est donc de la forme $\vec{u} = u_x\,\vec{x} + u_y\,\vec{y} + u_z\,\vec{z}$ avec $u_x = \mathrm{d}l/\mathrm{d}t$ et $u_y = u_z$. En définissant le taux d'élongation $\dot{\alpha} = (1/l)\,\mathrm{d}l/\mathrm{d}t$, on a donc $\dot{\varepsilon}_{xx} = \dot{\alpha}$. La masse de l'éprouvette étant constante, on doit avoir $\nabla \cdot u = 0 = \dot{\varepsilon}_{xx} + \dot{\varepsilon}_{yy} + \dot{\varepsilon}_{zz}$. Comme $u_y = u_z$, alors $\dot{\varepsilon}_{yy} = \dot{\varepsilon}_{zz}$ et donc $\dot{\varepsilon}_{yy} = \dot{\varepsilon}_{zz} = -\dot{\varepsilon}_{xx}/2 = -\dot{\alpha}/2$. On en déduit finalement que le tenseur des contraintes est :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -p + 2\mu\dot{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & -p - \mu\dot{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & -p - \mu\dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

Après quelques lignes de calcul, on trouve que l'équation de conservation de quantité de mouvements, conduit à : $\partial\sigma_{zz}/\partial z = \partial\sigma_{yy}/\partial y = 0$. Comme les faces de l'éprouvette ne subissent aucune contrainte, cela conduit donc à dire que $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$ en tout point de l'éprouvette. Donc l'expression du tenseur des contraintes nous conduit au résultat : $p = -\mu\dot{\alpha}$ et $\sigma_{xx} = 3\mu\dot{\alpha} = \mu_e\,\dot{\alpha}$. Cette dernière relation laissa penser à Trouton que la viscosité « élongationnelle » pouvait différer de la viscosité intrinsèque du matériau déduite de l'expérience de Newton.

5.6 Approximation de la lubrification hydrodynamique

C'est une approximation très importante qui est abondamment utilisée pour ramener un problème d'écoulement 2D ou 3D à un problème 1D.

Dans un grand nombre d'écoulements bidimensionnels ou axisymétriques, on observe une évolution lente de la section de l'écoulement. C'est le cas par exemple sur la Figure 5.3.

Figure 5.3 – Écoulement dans une conduite avec changement de section petit et monotone.

Les approximations de la lubrification hydrodynamique permettent, dans les conditions suivantes, d'obtenir une solution approchée :

- 1re hypothèse : l'écoulement est stationnaire, laminaire et isotherme ;
- 2e hypothèse : l'entrefer évolue lentement le long de l'écoulement $\left(\mathrm{d}h(x)/\mathrm{d}x << 1\right)$;
- 3e hypothèse : les courbures des surfaces en présence sont faibles : $h(x)/R(x) \ll 1 \ \forall x$, avec $1/R(x) = \mathrm{d}^2h(x)/\mathrm{d}x^2$ où R est le rayon de courbure.

Si ces hypothèses sont valables, elles nous permettent de considérer que l'écoulement est localement analogue à un écoulement établi dans une géométrie à entrefer constant. Cela revient à dire que les termes d'élongation sont petits devant les termes de cisaillement et que la pression est uniforme dans l'épaisseur de l'écoulement.

Considérons par exemple le cas d'un écoulement permanent de fluide newtonien et incompressible, avec un champ de vitesse de la forme : $\vec{u} = \left(u_x(x,y), u_y(x,y)\right)$. Si nous négligeons les termes d'inertie et de gravité devant les forces visqueuses, l'équation de conservation de la quantité de mouvement et l'équation de conservation de la masse se résument à :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right) \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\right) \\ \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{5.89}$$

En adoptant les hypothèses de la lubrification hydrodynamique, le champ de vitesse se réduit alors localement à $\vec{u} = \left(u_x(y), 0\right)$ et le système d'équations devient :

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x} = \mu \frac{\mathrm{d}^2 u_x(y)}{\mathrm{d}y^2} \tag{5.90}$$

En pratique, on montre que l'on peut appliquer cette approximation tant que $\mathrm{d}h(x)/\mathrm{d}x < 0{,}2$, c'est-à-dire jusqu'à un angle relatif des parois de l'écoulement de l'ordre de 10°.

Cette approximation peut être généralisée au cas d'un écoulement tridimensionnel de type couche mince. Si l'épaisseur de la couche évolue lentement dans les deux directions de l'écoulement et si les courbures des surfaces en présence sont faibles, il est possible de négliger la composante transversale de vitesse et de simplifier l'hypothèse cinématique :

$$\vec{u} = \left(u_x(x,y,z), u_y(x,y,z), u_z(x,y,z)\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \left(u_x(z), u_y(z), 0\right) \tag{5.91}$$

Comme précédemment cela revient à négliger les termes d'élongation et de cisaillement dans le plan devant ceux de cisaillement dans l'épaisseur et à considérer que la pression est uniforme dans l'épaisseur de l'écoulement.

Exercices

5.1 Équation de l'énergie sous forme enthalpique

Donner l'expression de la relation de conservation de l'énergie interne sous forme enthalpique.

5.2 Écoulement de Couette (plan)

On considère l'écoulement plan entre deux plaques distantes de h dont l'une est mobile à la vitesse U et l'autre est fixe. La largeur des parois est grande devant h ainsi que la longueur notée L. Le fluide a un comportement newtonien et l'écoulement est incompressible et permanent. On néglige le poids du fluide devant les forces de viscosité.

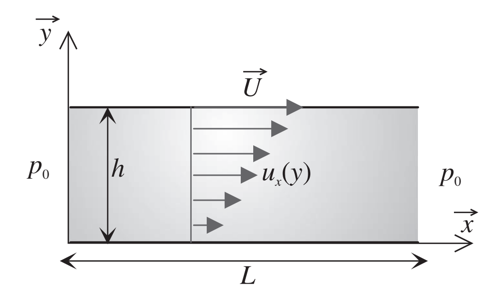


Figure 5.4

1. Montrer que le champ de vitesse est de la forme : $\vec{u} = (u_x(y), 0, 0)$.

2. À partir des équations de *Navier-Stokes*, montrer que le champ de pression est uniforme en tout point et égal à la pression atmosphérique p_0 et que $u_x(y) = Uy/h$.

3. Calculer le débit masse de l'écoulement.

5.3 Écoulement de Poiseuille (tube)

Un fluide est mis en écoulement dans une conduite cylindrique de rayon R sous l'effet d'une surpression Δp entre l'entrée et la sortie de la conduite. On note L la longueur de la conduite. Le fluide est newtonien de viscosité dynamique μ et de masse volumique ρ et l'écoulement est incompressible et permanent. On néglige le poids du fluide devant les forces de viscosité.

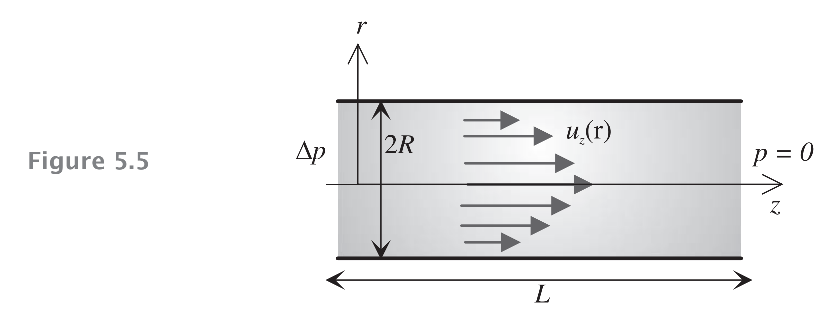


Figure 5.5

1. Montrer que le champ de vitesse est de la forme : $\vec{u} = \left(0,0,u_z\,(r)\right)$.

2. À partir des équations de Navier-Stokes, montrer que le champ de pression est $p = \Delta p\left(1 - z/L\right)$ et que $u_z\,(r) = \Delta p\left(R^2 - r^2\right)/4\,\mu L$.

3. Donner l'expression du débit masse de l'écoulement.

4. Donner l'expression de la contrainte à la paroi.

5.4 Écoulement de Couette (cylindrique)

Un fluide est mis en écoulement dans l'entrefer de deux cylindres coaxiaux, le cylindre intérieur est de rayon R_1 et le cylindre extérieur est de rayon R_2. Le cylindre intérieur est en rotation uniforme avec une vitesse angulaire Ω. On note L la hauteur des cylindres. Le fluide a un comportement newtonien (viscosité dynamique μ et masse volumique ρ) et l'écoulement est incompressible et permanent. On néglige le poids du fluide devant les forces de viscosité.

fluide
z
Ω
$u_\theta(r)$
r
L
cylindre en rotation
R_1
R_2
cylindre fixe

Figure 5.6

1. Montrer que le champ de vitesse est de la forme : $\vec{u} = (0, u_\theta(r), 0)$.

2. À partir des équations de Navier-Stokes, montrer que le champ de pression est uniforme en tout point du fluide et donner l'expression de $u_\theta(r)$.

3. Calculer le couple à appliquer au cylindre extérieur pour le maintenir fixe dans ces conditions.

5.5 Écoulement dans une calandre

Une calandre est une machine à cylindres permettant de fabriquer des plaques d'épaisseur calibrée. Nous étudions ici le passage de matière fondue de viscosité μ entre 2 rouleaux d'une calandre. Chaque rouleau, de rayon $R = 400$ mm et de largeur L, tourne à la vitesse de rotation angulaire ω. Les rouleaux sont de longueur suffisamment grande pour que l'on puisse traiter le problème dans la section d'écoulement uniquement. On note $2h_0 = 200\ \mu\text{m}$ la hauteur d'entrefer entre les 2 cylindres au niveau de leur centre de rotation.

Le processus de passage se schématise de la façon suivante :

- La matière fondue arrive sur le rouleau du bas.
- De la matière passe directement dans l'entrefer entre les 2 cylindres.
- Le reste de matière recircule pour former un bourrelet de matière fondue à l'arrière du cylindre.
- Une partie de la matière du bourrelet est entraînée dans l'entrefer et l'autre partie est entraînée dans le sens de la largeur ce qui a pour conséquence d'accroître la largeur de la plaque.

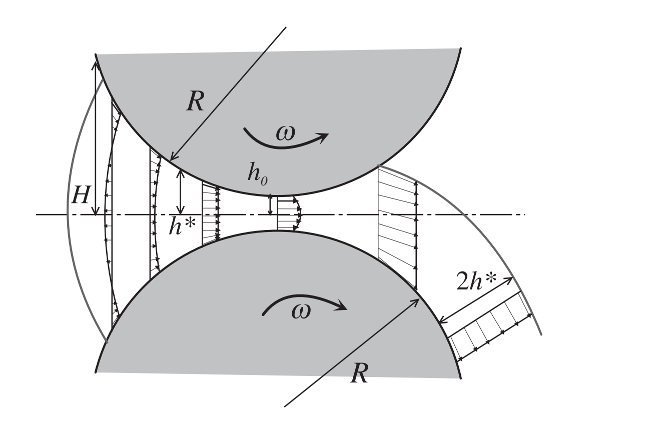


Figure 5.7

Une modélisation géométrique simplifiée de l'écoulement dans le plan est proposée sur la figure ci-dessus.

1. Justifier l'application de l'hypothèse de lubrification hydrodynamique.

2. Montrer que l'équation de *Navier-Stokes* se met sous la forme de l'équation de Reynolds :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 3\mu U_r \frac{h(x) - h^*}{h(x)^3}$$

où U_r est la vitesse à la périphérie d'un rouleau, $h(x)$ est la variation du demi entrefer en fonction de x et h^* est la hauteur de demi entrefer où la pression est maximale.

3. L'observation montre que la hauteur finale de la plaque est h^*. Exprimer la reprise d'épaisseur qui est le rapport entre l'épaisseur finale de la plaque et la hauteur d'entrefer $2h_0$.

4. Exprimer le couple à exercer sur chaque rouleau.

Solutions

5.1 En remplaçant l'enthalpie massique par son expression en fonction de l'énergie massique et de la pression :

$$h = e + \frac{p}{\rho}$$

Et donc :

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} - \frac{p}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$$

En utilisant l'équation de conservation de la masse, cela conduit à :

$$\rho\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + p\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$$

On introduit dans l'équation de conservation de l'énergie interne :

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = -p\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + \overline{\overline{s}} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}} - \vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi} = \rho\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} - p\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$$

Soit :

$$\rho\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \overline{\overline{s}} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}} - \vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi}$$

Comme l'enthalpie dépend de la température et de la pression :

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial h}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial h}{\partial T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$$

De plus, on montre que la différentielle totale exacte de l'enthalpie spécifique est (le lecteur est encouragé à se reporter à un ouvrage de thermodynamique pour la démonstration) : $\mathrm{d}h = C_p\,\mathrm{d}T + (k+v)\mathrm{d}p$ avec $C_p = (\partial h/\partial T)_p$ qui est la chaleur massique à pression constante et $k = -T(\partial s/\partial p)_T$ où s est l'entropie spécifique et $v = 1/\rho$ est le volume massique. On a alors :

$$\frac{\partial h}{\partial p} = v - T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{\rho} - T\left(\frac{\partial(1/\rho)}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{\rho} + \frac{T}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{\rho}\left(1 - T\beta_p\right)$$

Où $\beta_p = -1/\rho(\partial\rho/\partial T)_p$ est le coefficient de dilation thermique à pression constante. On trouve donc :

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\rho}\left(1 - \beta_p T\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + C_p \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$$

Finalement, la relation de conservation de l'énergie interne s'écrit :

$$\rho\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \left(1 - \beta_p T\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \rho C_p \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \overline{\overline{s}} : \overline{\overline{\dot{\varepsilon}}} - \vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi}$$

Soit :

$$\rho C_p \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \beta_p T \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \overline{\overline{s}} : \overline{\overline{\dot{\varepsilon}}} - \nabla\cdot\vec{\varphi}$$

Remarque : pour les gaz assimilables à des gaz parfaits on a $\beta_p = 1/T$.
La densité de flux de chaleur φ est donnée par la loi phénoménologique de Fourier :

$$\vec{\varphi} = -\lambda\,\vec{\nabla}T$$

En utilisant la dérivée particulaire, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit alors :

$$\boxed{\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}T\right) = \beta_p T \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \overline{\overline{s}} : \overline{\overline{\dot{\varepsilon}}} - \nabla\cdot\vec{\varphi}}$$

On retrouve dans cette équation les deux modes de transfert de la chaleur :

- la diffusion : $\vec{\nabla}\cdot\left(\lambda\vec{\nabla}T\right)$,
- le transport (ou convection) : $\rho C_p\,\vec{u}\cdot\vec{\nabla}T$.

Le terme source $\overline{\overline{s}} : \overline{\overline{\dot{\varepsilon}}}$ (produit tensoriel du tenseur de vitesse de déformation par le tenseur déviateur des contraintes) est le terme de dissipation thermique et ne doit pas être considéré comme un mode de transfert de la chaleur mais il constitue un mode de production de la chaleur.

5.2

1. L'écoulement est dans le plan (xy) et unidirectionnel selon x, on peut donc admettre que les composantes de vitesse selon y et z sont nulles. D'autre part l'écoulement est incompressible donc :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0 = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial u_y}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial u_z}{\partial z}}$$

On en déduit donc que $\vec{u} = \left(u_x(y), 0, 0\right)$.

2. Les équations de *Navier-Stokes* se réduisent à :

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial u_x}{\partial t}} + \cancel{u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}} + \cancel{u_x\frac{\partial u_y}{\partial y}} + \cancel{u_x\frac{\partial u_z}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \cancel{\rho g_x} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}}\right)$$

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial u_y}{\partial t}} + \cancel{u_y\frac{\partial u_x}{\partial x}} + \cancel{u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}} + \cancel{u_y\frac{\partial u_z}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \cancel{\rho g_y} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}}\right)$$

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial u_z}{\partial t}} + \cancel{u_z\frac{\partial u_x}{\partial x}} + \cancel{u_z\frac{\partial u_y}{\partial y}} + \cancel{u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \cancel{\rho g_z} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}}\right)$$

Soit :

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial y} \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

Les 2 dernières égalités nous disent que la pression ne dépend que de x et comme la vitesse ne dépend que de y, la première égalité nous dit que :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = K,\ K \text{ est une constante} \tag{5.92}$$

Ceci conduit à : $p(x) = Kx + C$ (où C est une constante). Comme $p = p_0$ en $x = 0$ et $x = L$, on en déduit donc que $K = 0$ et $p = p_0$ partout. Les conditions d'adhérence du fluide aux parois sont :

$$\begin{cases} u_x(y = 0) = 0 \\ u_x(y = h) = U \end{cases} \tag{5.93}$$

La relation (5.92) s'intègre sous la forme :

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow u_x = a\,y + b \tag{5.94}$$

On trouve les constantes a et b avec la relation (5.93), ce qui conduit à :

$$u_x(y) = U\,y/h$$

3. le débit masse par unité de largeur de plaque est :

$$Q_m = \rho\int_0^h u_x(y)\,\mathrm{d}y = \rho U\frac{h}{2}$$

5.3

1. On se place dans le repère de coordonnées cylindriques (r,θ,z). L'écoulement est unidirectionnel selon z et la symétrie de révolution rend la vitesse indépendante de θ. Enfin, l'équation de continuité donne :

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 = \cancel{\frac{\partial u_r}{\partial r}} + \frac{1}{r}\cancel{\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

On en déduit donc que $\vec{u} = (0,0,u_z(r))$.

2. Les équations de *Navier-Stokes* écrites en coordonnées cylindriques (voir annexe) se réduisent à :

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial \theta} \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial z} + \dfrac{\mu}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r}\right) \end{cases}$$

Les 2 premières relations entraînent que p ne dépend que de z et la 3e relation conduit à :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \frac{\mu}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r}\right) = K,\ K \text{ est une constante} \qquad (5.95)$$

Les conditions limites en pression sont : $p(x = 0) = \Delta p$ et $p(x = L) = 0$. La relation conduit alors à :

$$p = \Delta p\left(1 - \frac{z}{L}\right)$$

Les conditions aux limites en vitesse sont :

$$\begin{cases} u_z(r = R) = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r}(r = 0) = 0 \end{cases} \qquad (5.96)$$

L'intégration de la relation (5.95) avec les conditions aux limites de la relation (5.96) conduisent à :

$$u_z(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L}(R^2 - r^2) \qquad (5.97)$$

3. Le débit masse par unité de longueur de la conduite est :

$$Q_m = \rho\int_0^R u_z(r)2\pi r\,\mathrm{d}r = \rho\frac{\pi}{8\mu}\frac{\Delta p}{L}R^4 \qquad (5.98)$$

4. Si $\vec{t}$ est le vecteur tangent à la paroi, la contrainte à la paroi est par définition :

$$\tau_p = \overline{\overline{\sigma}}(\vec{t}) \cdot \vec{t} = -\mu\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}$$

Avec (5.97) on trouve alors :

$$\tau_p = \frac{\Delta p\, R}{2L}$$

5.4

1. L'écoulement a lieu dans le plan (rz) et il est unidirectionnel selon θ. D'autre part, l'équation de continuité conduit à :

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 = \cancel{\frac{\partial u_r}{\partial r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \cancel{\frac{\partial u_z}{\partial z}}$$

Ce qui montre que la vitesse selon θ ne dépend que de r et donc $\vec{u} = (0, u_\theta(r), 0)$.
2. Les équations de *Navier-Stokes* se résument à :

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial r} \\ 0 = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}(r u_\theta)}{\mathrm{d}r}\right) \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

Les égalités 1 et 3 montrent que la pression ne dépend que de θ et la 2e égalité conduit à :

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu\, r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(r u_\theta)}{\mathrm{d}r}\right) = K,\ K \text{ est une constante} \tag{5.99}$$

Les conditions aux limites en vitesse sont :

$$\begin{cases} u_z(r = R_2) = 0 \\ u_z(r = R_1) = \Omega R_1 \end{cases} \tag{5.100}$$

En intégrant la relation (5.99) avec les conditions aux limites (5.100) on trouve :

$$u_\theta(r) = \frac{R_1^2\,\Omega}{(R_2^2 - R_1^2)}\left(\frac{R_2^2 - r^2}{r}\right) \tag{5.101}$$

3. Le couple à exercer est :

$$\begin{aligned} C &= \tau(r = R_2)S = 2\mu\dot{\varepsilon}_{rz}(r = R_2)2\pi R_2 L \\ &= 2\pi R_2 L\left(\left.\frac{\mathrm{d}u_\theta}{\mathrm{d}r}\right|_{r=R_2} - \frac{u_\theta(r = R_2)}{R_2}\right) \times 2\mu \end{aligned} \tag{5.102}$$

Soit :

$$C = 4\pi\mu \frac{R_1^2\, R_1^2\, \Omega L}{(R_2^2 - R_1^2)} \tag{5.103}$$

5.5

1. En assimilant le cylindre à une parabole dans la région de l'écoulement, nous pouvons écrire la variation de demi entrefer en fonction de x sous la forme :

$$h(x) = h_0\left(1 + \frac{x^2}{2Rh_0}\right)$$

Ce qui conduit à :

$$\left|\frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}\right| = \frac{|x|}{R} = \sqrt{2\frac{h(x) - h_0}{R}} \ll 1,\ \forall x$$

D'autre part, les valeurs numériques de R et h_0 sont telles qu'elles vérifient :

$$\frac{h(x)}{R} \ll 1,\ \forall x$$

L'application de l'approximation de lubrification hydrodynamique est donc bien justifiée et on peut écrire que le champ de vitesse dans l'écoulement est de la forme : $\vec{u} = u(y)\vec{x}$.

2. En régime permanent et en négligeant le poids du fluide, les équations *Navier-Stokes* se simplifient sous la forme de celles d'un écoulement simplement cisaillé :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \mu\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2} \\ \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = 0 \end{cases}$$

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} u(x,-h(x)) = R\omega = U_r \\ u(x,h(x)) = U_r \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}u(x,0)}{\mathrm{d}y} = 0 \end{cases}$$

L'intégration de la première relation de *Navier-Stokes* conduit à :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}y + C_1 \Rightarrow u = \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

La deuxième condition limite donne $C_1 = 0$ et la première condition limite donne :

$$C_2 = U_r - \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{h(x)^2}{2}$$

La solution est donc :

$$u(x,y) = \frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left(y^2 - h(x)^2\right) + U_r$$

Le débit volume par unité de largeur est :

$$Q_v = 2\int_0^{h(x)} u(x,y)\,\mathrm{d}y = 2\left[\frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y^3}{3} - h(x)^2\,y\right) + U_r\,y\right]_0^{h(x)}$$

Soit :

$$Q_v = 2\left[-\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{h(x)^3}{3} + U_r\,h(x)\right]$$

Nous notons h^* la hauteur de demi-entrefer où la pression est maximale, soit :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0,\ h(x) = h^*$$

Ceci conduit à :

$$Q = 2U_r\,h^* = 2\left[-\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{h(x)^3}{3} + U_r\,h(x)\right]$$

Soit encore :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 3\mu U_r\,\frac{h^* - h(x)}{h(x)^3}$$

C'est ce que l'on nomme l'équation de *Reynolds.*

3. On note h_r la reprise d'épaisseur de la plaque qui est donc par définition : $h_r = h^*/h_0$. On effectue le changement de variable :

$$\beta(x) = \sqrt{\frac{h(x)}{h_0} - 1} = \frac{x}{\sqrt{2Rh_0}}$$

L'équation de Reynolds devient :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\beta} = 3\mu U_r\,\frac{\sqrt{2Rh_0}}{h_0^2}\,\frac{\beta^2 - \beta^{*2}}{(\beta^2+1)^3}$$

avec : $\beta^* = \sqrt{\dfrac{h^*}{h_0} - 1} = \sqrt{h_r - 1}.$

La pression en entrée du bourrelet étant égale à la pression atmosphérique que l'on prendra nulle, on a :

$$p(\beta) = 3\mu U_r\,\frac{\sqrt{2Rh_0}}{h_0^2}\int_{-\beta_H}^{\beta}\frac{\gamma^2 - \beta^{*2}}{(\gamma^2+1)^3}\,\mathrm{d}\gamma$$

On détermine β^* en écrivant que la pression est aussi nulle en sortie :

$$p(\beta^*) = 0 = \int_{-\beta_H}^{\beta^*}\frac{\gamma^2 - \beta^{*2}}{(\gamma^2+1)^3}\,\mathrm{d}\gamma$$

Cette intégrale ne peut être résolue que par des méthodes numériques (type méthode des trapèzes).

Par contre on montre que :

$$\lim_{\frac{H}{h_0}\to\infty} \frac{h^*}{h_0} = 1,23$$

4. La force exercée à l'interface entre le rouleau et le fluide est par définition :

$$F = L\int p(x)dx = p(\beta) = 6\mu U_r \frac{RL}{h_0} \int_{-\beta_H}^{\beta^*} \int_{-\beta_H}^{\gamma} \frac{\beta^2 - \beta^{*2}}{(\beta^2+1)^3} \mathrm{d}\beta \mathrm{d}\gamma$$

En remplaçant β^* par sa valeur et en faisant tendre β_H vers l'infini (ce qui suppose qu'on admet raisonnablement que la pression n'évolue plus lorsque la hauteur du bourrelet est grande), on trouve (compte tenu du résultat final de la question 3) :

$$F = 1,23\mu U_r \frac{RL}{h_0}$$

Le couple à exercer est :

$$C = L\int R\tau_R(x)\mathrm{d}x$$

τ_R est la contrainte de cisaillement à la surface du cylindre fixe qui s'exprime par :

$$\tau_R(x) = h(x)\frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x}$$

Ce qui conduit à :

$$C = 1,62\mu U_r L\sqrt{\frac{2R}{h_0}}$$

Bibliographie

BATCHELOR G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.

CANDEL S., *Mécanique des fluides*, DUNOD, 1990.

CHASSAING P., *Mécanique des fluides*, CEPADUES, 1997.

DESJARDINS D., COMBARNOUS M., BONNETON N., *Mécanique des fluides-Problèmes résolus avec rappels de cours*, DUNOD, Paris, 2002.

KUNDU P. K., COHEN I. M., *Fluid Mechanics*, Elsevier Academic Press, Third Edition, 2004.

LANDAU L., LIFCHITZ E., *Physique théorique*, *Mécanique des fluides*, tome 6, Ed. Librairie du Globe, 1971.

RHÉOLOGIE DES FLUIDES

6

OBJECTIFS

- Définir les lois de comportement où la viscosité dépend de façon générale de la contrainte, de la déformation et de la vitesse de déformation
- Intégrer ces lois de comportement dans les équations de conservation de la quantité de mouvement
- Obtenir des solutions pour les écoulements de base de fluides à comportement rhéo-fluidifiant et viscoélastique

6.1 INTRODUCTION

La *rhéologie* s'intéresse aux lois de comportement des fluides en écoulement. Une loi de comportement simple, telle que la loi de *Newton* que nous avons vue aux chapitres 1 et 5, relie le déviateur des contraintes au tenseur des vitesses de déformation au travers de la viscosité du fluide.

Néanmoins, les fluides réels ont des comportements qui peuvent être très différents les uns des autres. L'air est un fluide dont la très faible viscosité dynamique (dans les conditions classiques de pression et de température) permet de l'assimiler à un fluide parfait. Les fluides tels que l'eau, l'huile minérale, les métaux fondus ont un comportement visqueux qui est bien décrit par la loi de Newton. Les fluides chargés, tels que les peintures, ont des comportements qui associent viscosité et plasticité. Les polymères fondus ont un comportement qui associe *plasticité*, *viscosité* et élasticité. La particularité des polymères est qu'ils sont constitués de macromolécules. Une macromolécule est une très grande molécule, qui possède donc une masse moléculaire élevée. La notion de macromolécule a été introduite en 1922 par le chimiste allemand *Hermann Staudinger*. Un polymère est un système formé par un ensemble de macromolécules de même nature

chimique. En observant au microscope un polymère fondu à l'état de repos (donc en l'absence de contrainte), on constate que chaque *macromolécule* s'enchevêtre sur elle-même et avec les autres pour former ce que l'on appelle une pelote statistique, cette pelote baignant dans un solvant (voir Figure 6.1).

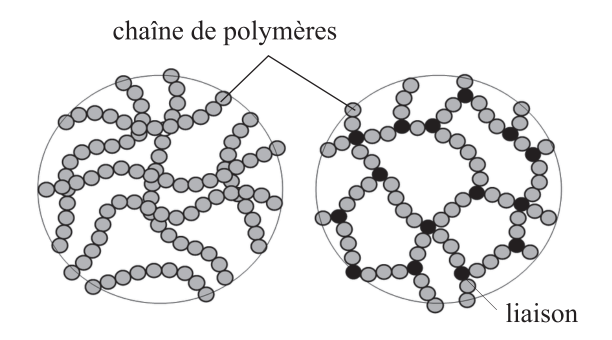


Figure 6.1 – Exemple de pelote statistique formée de macromolécules monodimensionnelles (cas des polymères thermoplastiques, schéma de gauche) et de macromolécule tridimensionnelle (cas des polymères thermodurcissables, à droite).

6.2 Comportement pseudo-plastique

6.2.1 Explication phénoménologique

En répétant l'expérience de *Newton* avec un polymère fondu, on constate qu'il n'y a plus de relation linéaire entre contrainte et vitesse de déformation (voir chapitre 1). On trouve en effet que la viscosité dynamique μ dépend du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. Lorsqu'on augmente le taux de cisaillement on constate une diminution de la contrainte, on parle alors de comportement *pseudo plastique* ou bien encore *rhéo-fluidifiant*. Les équations de Navier-Stokes ne peuvent donc constituer qu'une approximation de ce type d'écoulement.

Il est assez simple d'expliquer le comportement pseudo plastique d'un point de vue phénoménologique en examinant le matériau polymère à l'état fondu à l'échelle de la pelote statistique. À l'état de repos, si la macromolécule n'est soumise à aucune contrainte, elle va avoir tendance à se regrouper sur elle-même (conformation mettant en jeu une énergie minimale). Dans l'expérience de *Newton*, l'écoulement unidirectionnel va avoir tendance à étirer les macromolécules dans le sens de l'écoulement. Cet étirage est réversible dans le sens où la macromolécule retrouvera sa conformation initiale de repos lorsque l'on cessera l'écoulement. Le temps d'élongation et de retour à la configuration de repos est caractérisé par une durée λ intrinsèque à la macromolécule. Durant l'écoulement chaque macromolécule va posséder une sphère d'influence dont le rayon R est le rayon de la pelote statistique représentée sur la Figure 6.1. Si la distance d entre 2 macromolécules en écoulement est inférieure à $2R$, il y a alors possibilité d'enchevêtrement de ces 2 macromolécules. Dans ce cas, la viscosité apparente du fluide sera plus importante. On voit alors que la possibilité pour que l'inégalité $d < 2R$ soit vérifiée va dépendre du temps pendant lequel les deux macromolécules seront en possible interaction. Ce temps étant

fonction essentiellement du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$, on peut alors établir les conditions suivantes :

- si $\dot{\gamma} \ll \frac{1}{\lambda}$ alors la probabilité d'enchevêtrement est très élevée ;
- sinon, cette probabilité est quasi-nulle.

Cette conclusion montre bien que plus l'écoulement sera rapide (grand taux de cisaillement) et plus la viscosité du polymère sera faible et tendra vers celle du solvant dans lequel baignent les macromolécules. À l'inverse, plus l'écoulement sera lent et plus la viscosité sera élevée et dépendra des propriétés mécaniques intrinsèques des macromolécules.

6.2.2 Loi d'Ostwald

Pour décrire ce comportement dans le cas d'un écoulement simplement cisaillé, on utilise la loi-puissance, ou *loi d'Ostwald* (1923) qui exprime la viscosité en fonction du taux de cisaillement sous la forme (vue au Chapitre 1) :

$$\mu_{app}(\dot{\gamma}) = K\,|\dot{\gamma}|^{m-1} \tag{6.1}$$

K est appelée consistance du liquide et s'exprime en Pa.s^{m}. Le paramètre m ($m \leqslant 1$) est appelé indice de pseudo plasticité et on notera que :

- si $m = 1$, on retrouve le comportement newtonien ;
- si $m = 0$, le comportement est plastique, c'est-à-dire que le fluide évolue en bloc comme s'il était devenu solide.

La relation (6.1) montre que lorsque $\dot{\gamma} \to 0$ alors $\mu \to \infty$, ce qui est physiquement impossible. En effet pour un matériau en comportement viscoélastique, la viscosité atteint un palier newtonien à faible taux de cisaillement.

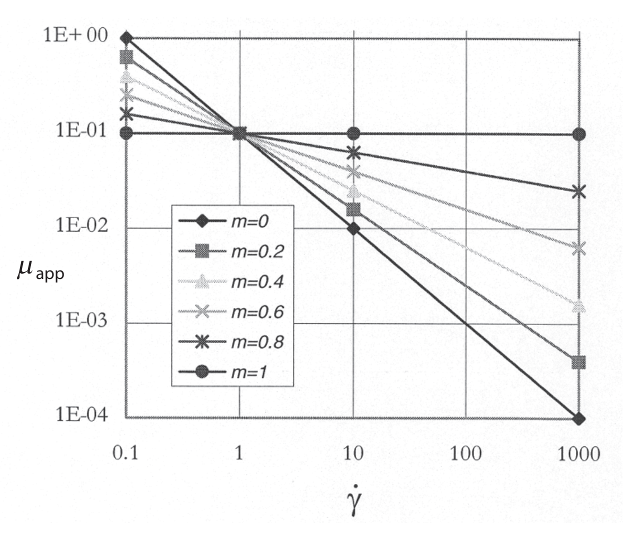


Figure 6.2 – Représentation de l'évolution de la viscosité en fonction du taux de cisaillement à partir de la loi d'Ostwald (K = 0,1 Pa.s^{m}).

Autres lois de comportement pseudo-plastique

Pour pallier le comportement aberrant de la loi-puissance aux très basses valeurs du taux de cisaillement, le comportement pseudo-plastique peut être modélisé par d'autres lois semi-empiriques du type :

Loi de Cross (1965)

$$\frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = \frac{1}{1 + (\lambda\,\dot{\gamma})^m}$$

λ est le temps caractéristique vu précédemment, μ_0 est la viscosité newtonienne à faible taux de cisaillement et μ_∞ est la viscosité newtonienne à fort taux de cisaillement. Une représentation de cette loi est donnée sur la Figure (6.3).

Loi de Carreau (1972)

$$\frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = \left(1 + (\lambda\,\dot{\gamma})^2\right)^{\frac{m-1}{2}}$$

Les paramètres de cette loi ont la même signification que pour la loi de *Cross*. Comme pour la loi d'*Ostwald*, ces deux modèles ne s'appliquent qu'à des écoulements simplement cisaillés, donc des écoulements unidirectionnels.

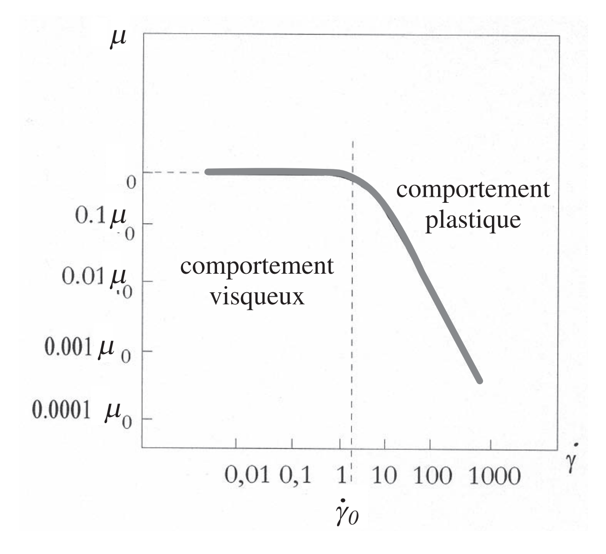


Figure 6.3 – Variation de la viscosité en fonction du taux de cisaillement pour un matériau en comportement pseudo-plastique à partir de la loi de Cross ($\dot{\gamma}_0$ désigne le taux de cisaillement limite entre comportement plastique et comportement visqueux).

6.2.3 Généralisation de la loi-puissance au cas tridimensionnel

La loi-puissance se généralise au cas d'un écoulement tridimensionnel sous la forme :

$$\bar{\bar{s}} = 2\,K\,(\dot{\bar{\gamma}})^{m-1}\,\dot{\bar{\bar{\varepsilon}}} \tag{6.2}$$

$\bar{\bar{s}}$ est le déviateur des contraintes et $\dot{\bar{\gamma}}$ le taux de cisaillement généralisé défini par :

$$\dot{\bar{\gamma}} = \sqrt{2\sum_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^2} \tag{6.3}$$

6.3 Comportement viscoélastique

Certains polymères à l'état fondu ont un comportement qui ne peut pas être décrit par une loi de comportement newtonienne ou viscoplastique. Ces différences de comportement dans des configurations d'écoulements divers sont clairement observables.

6.3.1 Gonflement en sortie de filière

Pour un fluide newtonien, la variation du diamètre du jet en sortie d'une filière est de l'ordre de 10 % pour des vitesses d'écoulement faible, puis diminue pour devenir finalement négative pour des vitesses élevées. Pour certains polymères, la variation de diamètre peut être de 100 % à 200 % selon la longueur du capillaire et le débit d'écoulement (voir la Figure 6.4). Le matériau tend à revenir à la configuration qu'il avait dans le réservoir : c'est l'effet mémoire caractéristique d'un matériau polymère à l'état fondu.

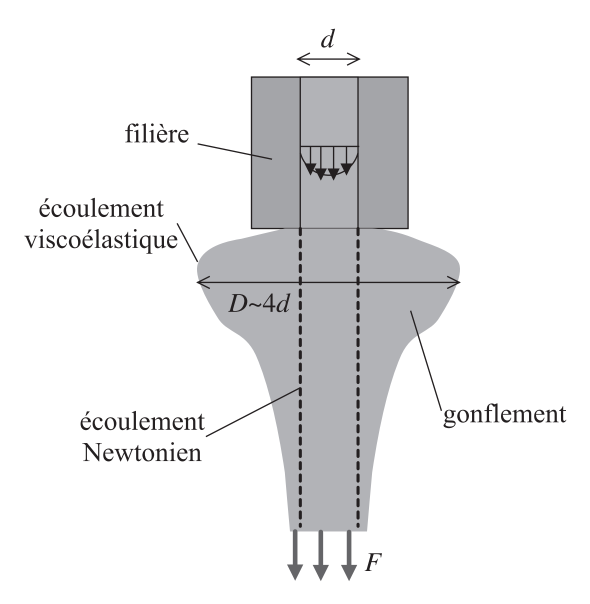


Figure 6.4 – **Gonflement en sortie de filière pour un polymère fondu ayant un comportement viscoélastique.**

6.3.2 Effet Weissenberg

C'est la différence de comportement entre un liquide newtonien et viscoélastique dans des écoulements comportant une partie fixe et une partie en rotation.

Dans le cas de l'écoulement de Couette, le liquide est confiné dans l'espace compris entre deux cylindres coaxiaux. Le cylindre intérieur est en rotation et le cylindre extérieur est fixe. On observe alors une différence de comportement importante pour les liquides visqueux et viscoélastiques, comme cela est représenté sur la Figure 6.5.

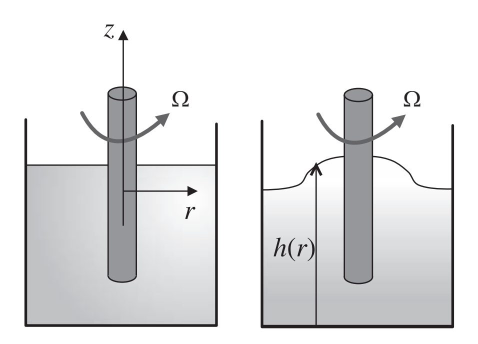


Figure 6.5 – Modification de la surface libre d'un matériau viscoélastique placé dans l'entrefer de deux cylindres. Le cylindre intérieur est en rotation et le cylindre extérieur est fixe.
À gauche le fluide a un comportement newtonien, à droite le comportement est viscoélastique.

La modification de la surface libre est très importante. Ce phénomène se retrouve lorsque le liquide est placé entre deux disques dont l'un est en rotation ou entre un cône en rotation et un plan. Dans ce cas il faut exercer une force sur le disque ou le cône pour les maintenir dans leur position de départ. Ce phénomène est exploité pour déterminer les caractéristiques du polymère (ces appareils sont appelés rhéomètres).

6.3.3 Instabilités des écoulements viscoélastiques

Contrairement au comportement de matériaux visqueux ou viscoplastiques, les matériaux viscoélastiques se comportent de manière instable dans certains types d'écoulements. C'est le cas pour les procédés d'étirage, de calandrage et d'extrusion.

Le phénomène d'extrusion consiste à étirer un polymère fondu au travers d'une filière cylindrique pour obtenir un matériau solide sous la forme d'un cylindre. En fonction du débit d'extrusion on observe une forme de l'extrudât qui peut comporter des défauts plus ou moins importants comme cela est représenté sur la Figure 6.6. Les phénomènes regroupés sous le terme de rupture d'extrudât correspondent à des débits d'écoulement critiques. Les conséquences sont diverses et concernent un large domaine de matériaux viscoélastiques. On retrouve aussi ces défauts de fabrication lors de procédés de

calandrage (le matériau est mis en mouvement au travers de 2 cylindres en rotation et l'épaisseur de la plaque réalisée doit être égale à l'entrefer entre les 2 cylindres) quand la vitesse des cylindres est trop élevée ou que l'entrefer entre deux cylindres est trop petit. Dans le cas de l'étirage d'un polymère fondu, mais aussi dans le cas de certains fluides visqueux (sirop de glucose), au-delà d'un taux d'étirage critique, on voit apparaître des irrégularités périodiques à la surface du matériau. Ce phénomène est d'autant plus marqué que la longueur d'étirage est faible.

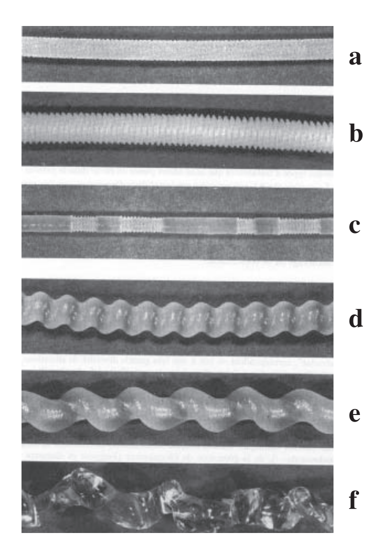


Figure 6.6 – **Instabilités dans le cas de l'écoulement d'un polymère extrudé en fonction du débit (croissant de a) à f)).**

a) et b) irrégularité de surface souvent périodique liée au débit et à la température du polymère extrudé, c) succession de zones lisses et ondulées, d) pour des débits plus importants l'irrégularité de surface disparaît, e) et f) défaut hélicoïdal dont l'amplitude varie avec le débit (polystyrène et polypropylène), g) écoulement chaotique pour des débits plus importants (ref. Centre de Mise en forme des matériaux, Paris).

6.3.4 Explication phénoménologique

Comme nous avons pu le voir plus haut, les macromolécules au repos (en l'absence de contrainte) adoptent la conformation la plus stable et forment donc une pelote. Lorsque l'on exerce un effort de traction, les chaînes commencent tout d'abord par se tendre, c'est le comportement élastique. Une fois qu'elles ont atteint leur élongation maximale, le matériau commence enfin à s'écouler : c'est le comportement visqueux comme le montre la Figure 6.7. Bien sûr le phénomène réversible se produit lorsque l'on cesse la contrainte, à savoir que lorsque l'écoulement cesse, les chaînes se recroquevillent pour retrouver leur conformation stable initiale. Ce comportement semble donc être comparable à celui d'un système intégrant une raideur (pour l'élasticité) et un amortisseur (pour la viscosité).

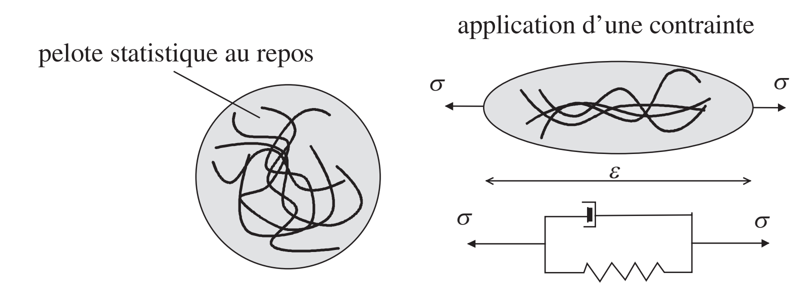


Figure 6.7 – Explication phénoménologique du comportement viscoélastique comme un système raideur-amortisseur.

Ainsi, lors du processus de mise en circulation du polymère fondu dans une filière, les macromolécules vont tout d'abord s'étirer puis le polymère va commencer à circuler dans la filière. À la sortie de la filière les contraintes cessent et les macromolécules retrouvent la conformation de repos qu'elles avaient dans le réservoir. Ceci explique le fort gonflement observé sur la Figure 6.4.

6.3.5 Comportement transitoire

Reprenons l'écoulement de *Couette* décrit sur la Figure 6.5 et considérons le système au repos. À l'instant initial, on met le cylindre intérieur en rotation constante. Dans le cas du fluide visqueux, la contrainte de cisaillement apparaît en même temps que la déformation. Au contraire, pour le polymère viscoélastique la contrainte n'apparaît qu'au bout d'un certain temps λ temps dont nous avons vu la signification physique au paragraphe 6.2.1). Ce phénomène est représenté sur la Figure 6.8. De la même façon, lorsque l'on stoppe la rotation du cylindre intérieur, la contrainte disparaît instantanément dans le cas du fluide visqueux, alors qu'elle ne disparaît qu'au bout d'un temps, égal lui aussi à λ, pour le liquide viscoélastique. Ce temps λ s'appelle le temps de relaxation du liquide viscoélastique.

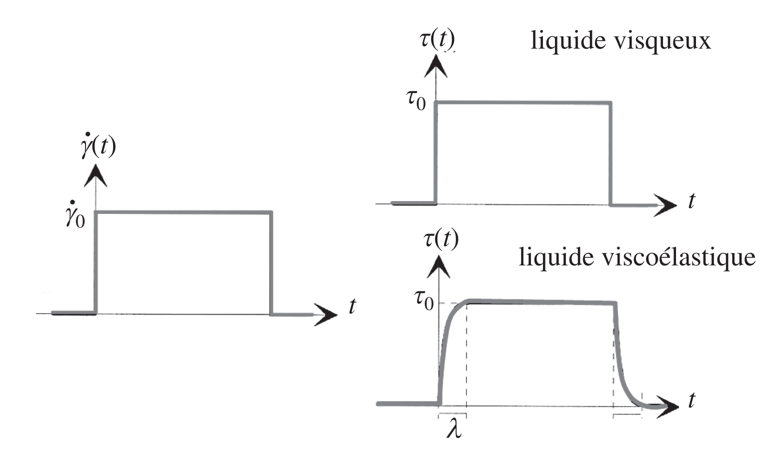


Figure 6.8 – Réponse de liquides visqueux et viscoélastique dans une expérience de relaxation.

On considère maintenant que l'état de contrainte et de déformation s'est stabilisé, c'est-à-dire que l'on a atteint le régime permanent et que l'on débraye le cylindre intérieur (il n'y a plus de contraintes appliquées au fluide). On constate alors que le fluide newtonien s'immobilise immédiatement alors que l'on observe un retour en arrière du fluide viscoélastique (entraînant avec lui le cylindre intérieur dans ce mouvement de recul). Cela veut donc dire que le liquide tend à retrouver sa configuration initiale non déformée sous la forme d'un retour élastique : c'est le phénomène de recouvrance de la déformation décrit par la Figure 6.9.

Si enfin le cylindre intérieur est animé d'un mouvement de rotation périodique, on met en évidence deux types de comportement du matériau viscoélastique selon la fréquence de rotation. Pour une fréquence faible le matériau a un comportement visqueux. Dans ce cas la contrainte et la déformation sont en quadrature. À fréquence élevée, le matériau a par contre un comportement élastique qui se traduit par le fait que contrainte et déformation sont en phase. La fréquence de transition entre les deux domaines est de l'ordre de $1/\lambda$, où λ est le temps de relaxation que nous avons précédemment étudié.

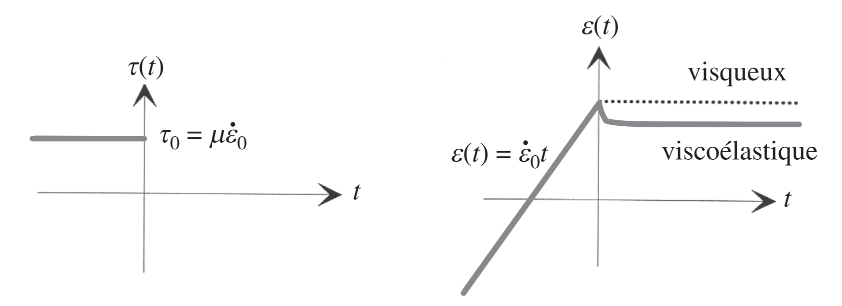


Figure 6.9 – **Phénomène de recouvrement de la déformation par un matériau viscoélastique ($\dot{\varepsilon}_0$ est la vitesse de déformation constante avant débrayage du cylindre intérieur et correspondant à la contrainte de cisaillement τ_0).**

Ces diverses expériences montrent bien le rôle respectif du comportement visqueux et du comportement élastique dans ce type de matériau, d'où son appellation de matériau viscoélastique.

6.4 Loi de comportement d'un matériau viscoélastique

Les matériaux viscoélastiques sont modélisés par des combinaisons de ressorts (élasticité) et d'amortisseurs (viscosité). Les lois de comportement de ces deux milieux étant rappelées sur la Figure 6.10. La raideur (cellule du haut) modélise le comportement élastique (E est le module d'élasticité), la cellule du bas modélise le comportement visqueux (on note μ_{m} la viscosité du matériau pour la distinguer de μ qui lie le déviateur des contraintes à la vitesse de déformation).

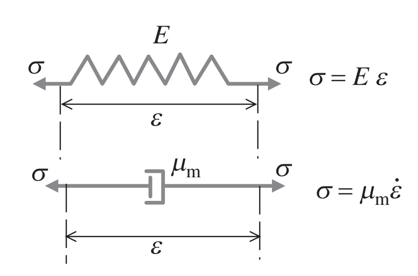


Figure 6.10 – **Éléments de base pour la représentation du comportement de matériaux viscoélastiques.**

6.4.1 Cellule de Maxwell

La loi de comportement du liquide viscoélastique le plus simple est décrite par la cellule de *Maxwell* représentée sur la Figure 6.11. Cette cellule est constituée d'une raideur et d'un amortisseur en série.

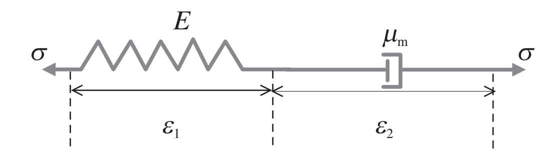


Figure 6.11 – **Cellule de Maxwell représentative du comportement d'un matériau viscoélastique.**

La loi de comportement d'une telle cellule est alors :

- $\sigma = E\,\varepsilon_1$, pour la raideur, soit $\dot{\sigma} = E\,\dot{\varepsilon}_1$
- $\sigma = \mu_m\,\dot{\varepsilon}_2$, pour l'amortisseur

Comme : $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \Leftrightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2$

D'où la loi de comportement :

$$\sigma + \lambda\,\dot{\sigma} = \mu_m\,\dot{\varepsilon} \text{ avec } \lambda = \frac{\mu_m}{E} \tag{6.4}$$

6.4.2 Relaxation de la contrainte

Reprenons l'exemple de l'écoulement simplement cisaillé tel que décrit par exemple sur la Figure 6.5 (écoulement de *Couette* cylindrique). À l'instant initial on impose la déformation $\varepsilon = \varepsilon_0$. Alors la contrainte qui s'établit est solution de : $\mu_m\,\dot{\varepsilon} = \sigma + \lambda\,\dot{\sigma}$ soit donc $\sigma = \mu_m\,\dot{\varepsilon}_0\left(1 - \exp\left(-t/\lambda\right)\right)$, qui met en évidence le retard à l'établissement de la contrainte.

Lorsque la déformation cesse au temps δt alors pour $t \geqslant \delta t$, $\varepsilon = 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon} = 0 = \sigma + \lambda\,\dot{\sigma}$, d'où $\sigma = \sigma_0 \exp\left(-(t - \delta t)/\lambda\right)$ (où σ_0 est la contrainte qui était appliquée au fluide jusqu'à l'instant δt). On vérifie bien que la contrainte diminue exponentiellement avec la constante de temps λ.

6.4.3 Recouvrance de la déformation

À partir d'un état correspondant au régime permanent, à l'instant initial on débraye le cylindre intérieur :

$$\begin{cases} t \leqslant 0 & \sigma = \mu_m \, \dot{\varepsilon}_0 = \tau_0 \\ t > 0 & \sigma = 0 \end{cases} \tag{6.5}$$

La loi de Maxwell s'intègre sous la forme :

$$\varepsilon(t) - \varepsilon(0) = \underbrace{\frac{1}{\mu_m}\int_0^t \sigma \, \mathrm{d}t}_{0} + \frac{\lambda}{\mu_m}[\sigma]_0^t = -\frac{\lambda}{\mu_m}\tau_0 = -\lambda \, \dot{\varepsilon}_0 \tag{6.6}$$

Dans la relation de Maxwell, la recouvrance s'effectue sans retard, ce qui n'est pas le cas en général pour la plupart des polymères. En pratique le phénomène de recouvrance est plus rapide que le phénomène de relaxation à la contrainte (voir Figure 6.12).

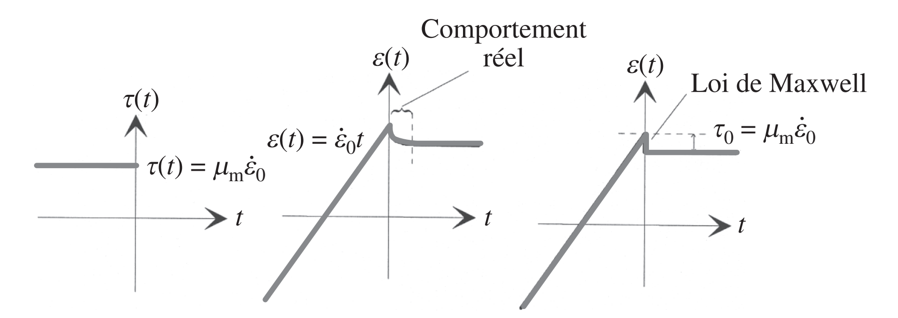


Figure 6.12 – Réponse du modèle de Maxwell pour la recouvrance à la déformation.

6.5 Les différentes lois de comportement d'un matériau viscoélastique

6.5.1 Différence de contraintes normales

La loi de *Maxwell* modélise bien la dépendance au temps du comportement de matériaux viscoélastiques. Par contre, elle n'explique pas l'effet *Weissenberg* que nous avons observé sur la Figure 6.5. En effet, ce phénomène résulte de l'expression générale du tenseur de contrainte pour un écoulement simplement cisaillé qui est (pour un écoulement de *Couette* en coordonnées cylindriques) :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & 0 \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

Dans le cas d'un fluide newtonien, on sait que $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = -p$ et $\sigma_{r\theta} = \mu\dot{\gamma}$. Or dans le cas d'un liquide viscoélastique la loi de comportement n'implique pas l'égalité entre les contraintes normales. C'est le cas pour l'écoulement de *Couette* où on observe une différence de contraintes normales entre σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ alors que $\sigma_{rr} \sim \sigma_{zz}$ (voir exercice 6.5). Ainsi, l'application du bilan de quantité de mouvement décrite au chapitre 5 conduit en coordonnées cylindriques à (voir formulaire en annexe) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{r} > 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial r} > 0 \end{aligned} \tag{6.8}$$

La contrainte selon z équilibre le poids de liquide de hauteur $h(r)$:

$$\sigma_{zz} = -\rho g h(r) \tag{6.9}$$

Or comme $\partial\sigma_{zz}/\partial r > 0$ d'après la relation (6.8), ceci implique que $\partial h(r)/\partial r < 0$ d'après la relation (6.9) et qu'il y a donc une remontée de liquide au centre.

Dans l'écoulement de *Couette*, nous savons que chaque surface de cisaillement est un cylindre de même axe que l'axe de révolution des cylindres solides. La différence entre un écoulement visqueux et viscoélastique est l'existence d'une contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ selon la direction de cisaillement pour le deuxième. Ainsi, chaque couche cylindrique du liquide viscoélastique est soumise à une tension qui doit être équilibrée par une surpression interne. Il existe donc un gradient de pression dans la direction radiale de l'écoulement, de la périphérie vers le centre, qui génère cette remontée de fluide sur l'axe de rotation.

6.5.2 Lois à dérivation convective de la contrainte

La loi de *Maxwell*, définie par la relation (6.4) correspond à un écoulement simplement cisaillé, donc unidirectionnel. Sa généralisation au cas tridimensionnel nécessite l'introduction d'une dérivée particulière : la dérivée convective. Cet opérateur est nécessaire pour calculer la dérivée du tenseur des contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$ intervenant dans la relation de *Maxwell*. En effet, la dérivation particulaire n'est pas applicable pour un tenseur car elle dépend du référentiel.

Dans le cas du fluide visqueux incompressible, nous avons vu que le tenseur des contraintes se décompose en un tenseur sphérique $-p\overline{\overline{I}}$, où $p = -\text{trace}\left(\overline{\overline{\sigma}}\right)/3$ est la pression hydrostatique, et un déviateur des contraintes $\overline{\overline{s}} = \overline{\overline{\sigma}} + p\overline{\overline{I}}$. Dans ce cas, la loi de comportement (loi de *Newton*) lie le déviateur des contraintes au tenseur des vitesses de déformation ($\overline{\overline{s}} = 2\mu\overline{\overline{\dot{\varepsilon}}}$). Pour un fluide viscoélastique, nous pouvons toujours réaliser cette décomposition sous la forme : $\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\sigma}}' - p'\overline{\overline{I}}$, où $\overline{\overline{\sigma}}'$ est appelé tenseur des extra-contraintes et p' est une pression mais qui n'est plus la pression hydrostatique puisque :

$$p = -\frac{1}{3}\text{trace}\left(\overline{\overline{\sigma}}\right) = p' - \frac{1}{3}\text{trace}\left(\overline{\overline{\sigma}}'\right) \tag{6.10}$$

Considérons l'écoulement simplement cisaillé entre plaques parallèles $\vec{u} = (u_x(y), 0, 0)$. La dérivée particulaire de chaque composante du tenseur des extra-contraintes est :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma'_{xx}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\sigma'_{xx} \tag{6.11}$$

Or :

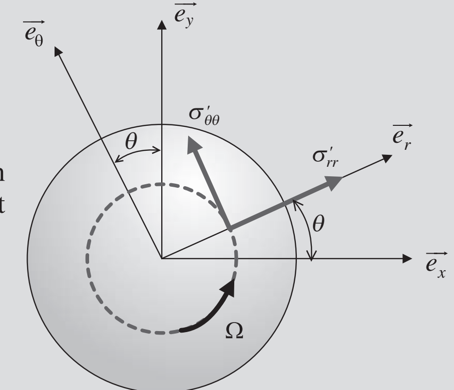
$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\sigma'_{xx} = u_x \frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial z} = 0 \tag{6.12}$$

En effet, seule la composante u_x est non nulle et σ'_{xx} ne dépend que de y. Et ceci se vérifie pour toutes les autres composantes du tenseur des extra-contraintes. Ainsi, la généralisation de la loi de *Maxwell* aboutirait à la loi de Newton en 3D et ne prendrait plus en compte le comportement élastique (en particulier elle ne conduit plus à l'existence de la différence de contraintes normales). L'explication physique de ce résultat est que la dérivée particulaire dépend du référentiel et ne peut donc pas être appliquée à une loi de comportement.

Dérivée particulaire du tenseur des contraintes

Soit l'écoulement cylindrique permanent défini sur la figure ci-dessous, où le tenseur des extra-contraintes est de la forme :

$$\overline{\overline{\sigma'}} = \begin{bmatrix} \sigma'_{rr}(r) & 0 \\ 0 & \sigma'_{\theta\theta}(r) \end{bmatrix}$$



Dans le repère $(\vec{e_r},\vec{e_\theta})$ lié au disque, on observe que le champ des contraintes est constant et donc que :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma'_{rr}}{\mathrm{d}t}\right|_{(\vec{e_r},\vec{e_\theta})} = \left.\frac{\mathrm{d}\sigma'_{\theta\theta}}{\mathrm{d}t}\right|_{(\vec{e_r},\vec{e_\theta})} = 0$$

Plaçons nous maintenant dans le repère fixe $(\vec{e_x},\vec{e_y})$. On a donc :

$$u_x = -r\Omega\sin\theta = -\Omega y$$
$$u_y = r\Omega\cos\theta = \Omega x$$

et : $$\begin{bmatrix} \sigma'_{xx} & \sigma'_{xy} \\ \sigma'_{xy} & \sigma'_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'_{rr}(r) & 0 \\ 0 & \sigma'_{\theta\theta}(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

soit : $$\begin{bmatrix} \sigma'_{xx} & \sigma'_{xy} \\ \sigma'_{xy} & \sigma'_{yy} \end{bmatrix} = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{bmatrix} \sigma'_{rr}x^2 + \sigma'_{\theta\theta}y^2 & (\sigma'_{rr} - \sigma'_{\theta\theta})xy \\ (\sigma'_{rr} - \sigma'_{\theta\theta})xy & \sigma'_{rr}y^2 + \sigma'_{\theta\theta}x^2 \end{bmatrix}$$

En appliquant la dérivée particulaire on trouve donc :

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\Omega}{x^2 + y^2}(\sigma'_{rr} - \sigma'_{\theta\theta})\begin{bmatrix} -2xy & x^2 - y^2 \\ x^2 - y^2 & 2xy \end{bmatrix}$$

On voit que cette dérivée est nulle seulement si $\sigma'_{rr} = \sigma'_{\theta\theta}$. Or l'écoulement d'un fluide viscoélastique entraîne une différence entre ces 2 contraintes. La dérivée particulaire n'est donc pas adaptée à décrire le taux de variation d'une quantité tensorielle dans une loi de comportement.

Pour calculer la dérivée du tenseur des contraintes il est donc nécessaire de définir un repère qui se déforme en même temps que le fluide. Ce repère est dit convectif. *Oldroyd* a alors défini la dérivée convective comme :

$$\frac{\delta\overline{\overline{\sigma}}'}{\delta t} = \frac{\mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}}'}{\mathrm{d}t} - \overline{\overline{\nabla}}\vec{u}\,\overline{\overline{\sigma}}' - \overline{\overline{\sigma}}'\left(\overline{\overline{\nabla}}\vec{u}\right)^t \tag{6.13}$$

où le taux de variation de $\overline{\overline{\sigma}}'$ se calcule toujours à partir de la dérivée particulaire :

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\overline{\overline{\sigma}}'}{\partial t} + \vec{u}\cdot\overline{\overline{\nabla}}\overline{\overline{\sigma}}' \tag{6.14}$$

Autres dérivées convectives

La dérivée d'*Oldroyd* (appelée aussi dérivée doublement contravariante) est la plus utilisée mais il faut aussi citer la dérivée de *Rivlin* dite doublement covariante :

$$\frac{D\overline{\overline{\sigma}}'}{Dt} = \frac{\mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}}'}{\mathrm{d}t} - \overline{\overline{\sigma}}'\overline{\overline{\nabla}}\vec{u} + \left(\overline{\overline{\nabla}}\vec{u}\right)^t\overline{\overline{\sigma}}'$$

Ou bien encore la dérivée de *Jauman* qui est une combinaison linéaire des dérivées d'*Oldroyd* et de *Rivlin* :

$$\frac{D\overline{\overline{\sigma}}'}{Dt} = \frac{\mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}}'}{\mathrm{d}t} - \overline{\overline{R}}\,\overline{\overline{\sigma}}' - \overline{\overline{\sigma}}'\,\overline{\overline{R}}$$

Où $\overline{\overline{R}}$ est le tenseur des rotations.

L'utilisation de cette loi de dérivation convective dans la relation de *Maxwell* en 1D conduit à la relation généralisée, appelée aussi modèle de *Maxwell* convecté, sous la forme :

$$\overline{\overline{\sigma}}' + \lambda\frac{\delta\overline{\overline{\sigma}}'}{\delta t} = 2\,\mu\,\dot{\overline{\overline{\varepsilon}}} \tag{6.15}$$

Remarque

On constate que contrairement à la relation (6.4) en 1D, la relation généralisée en 3D fait intervenir un coefficient 2 au second membre de l'équation de manière à retrouver le modèle classique des fluides visqueux lorsque le coefficient d'élasticité E est nul. Dans ce cas c'est bien la viscosité μ au sens de la loi de *Newton* que l'on retrouve dans le modèle généralisé.

Exercices

6.1 Écoulement de Poiseuille plan avec un fluide pseudoplastique

On considère un fluide s'écoulant entre 2 plaques fixes sous l'effet d'une différence de pression Δp entre l'entrée et la sortie du canal. Le comportement du fluide est régi par une loi-puissance.

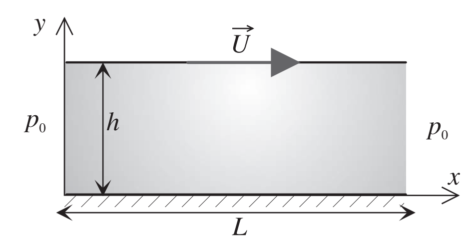
1. Appliquer la loi de comportement dans le bilan de quantité de mouvement pour trouver la nouvelle expression du champ de vitesse.

2. En déduire l'expression du débit volume.

6.2 Cisaillement simple d'un fluide viscoélastique

On considère le cisaillement simple d'un fluide ayant un comportement viscoélastique et dont la loi de comportement est décrite par la relation (6.15) de *Maxwell*.

Figure 6.13



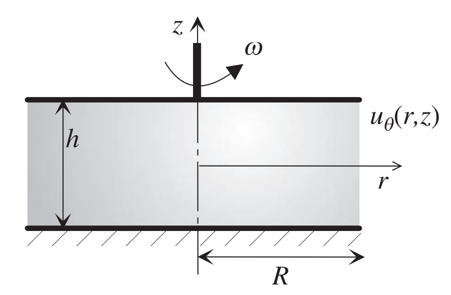
1. Montrer l'existence d'une différence de contrainte normale dans cet écoulement.

2. Quelle condition doit être vérifiée pour se rapprocher de la solution d'un comportement de fluide newtonien ?

3. Donner l'expression de la pression hydrostatique.

6.3 Cisaillement d'un fluide viscoélastique entre 2 disques

Figure 6.14



On considère le cisaillement d'un fluide entre 2 disques coaxiaux de rayon R et d'entrefer h. Le disque inférieur est fixe alors que le disque supérieur est en rotation à la vitesse angulaire ω. L'écoulement est permanent et le fluide a un comportement viscoélastique et suit la loi de *Maxwell* avec une viscosité μ et un temps de relaxation λ. Étant donné la géométrie de l'écoulement, on admet que les plans de cisaillement du fluide sont parallèles au disque et ont une vitesse angulaire $\Omega(z)$.

1. Donner l'expression du tenseur des contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$.

2. Donner l'expression de $\overline{\overline{\nabla}}\vec{u}$ et de la dérivée convective de $\overline{\overline{\sigma}}'$.

3. En déduire l'expression de $\overline{\overline{\sigma}}'$ puis de $\overline{\overline{\sigma}}$.

4. Montrer que p' ne dépend pas de z et donner l'expression de $\Omega(z)$ en fonction de ω, h et z.

5. On note p'_0 la pression au centre et p_a la pression atmosphérique à la périphérie. Exprimer $(p'_0 - p_a)$ en fonction de μ, λ, ω, h et R.

6. Calculer la force F d'écartement des deux disques et le couple C à appliquer au disque en rotation.

7. Montrer que les réponses à la question **6.** permettent d'appréhender une méthode de mesure de λ.

6.4 Écoulement de Couette d'un fluide de Maxwell – Effet Weissenberg

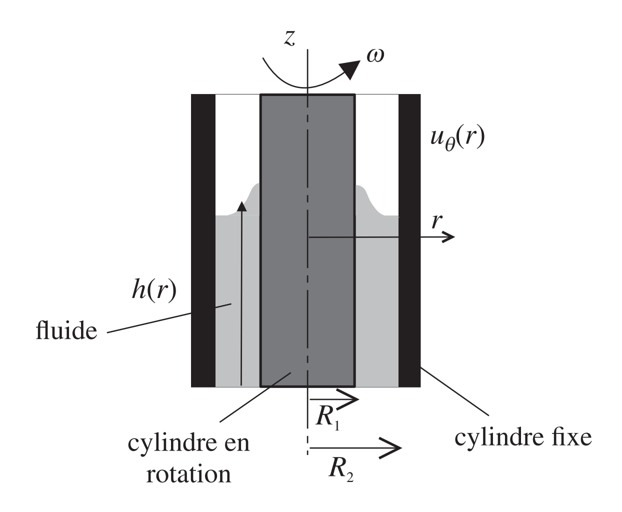


Figure 6.15

On considère un fluide viscoélastique dans un écoulement de Couette cylindrique, tel que celui représenté sur la figure ci-dessous.

1. Donner l'expression de $\overline{\overline{\nabla}}\vec{u}$ et de la dérivée convective de $\overline{\overline{\sigma}}'$.

2. En déduire l'expression de $\overline{\overline{\sigma}}$. Exprimer les trois fonctions viscométriques : $\tau(\dot{\gamma})$, $N_1(\dot{\gamma})$ et $N_2(\dot{\gamma})$.

3. En appliquant l'équation de conservation de la quantité de mouvement, montrer que le champ de vitesse est le même que celui obtenu pour un fluide newtonien.

4. Exprimer σ_{zz} puis déterminer l'expression de la hauteur de surface libre $h(r)$

6.5 Étirage d'un liquide viscoélastique

On considère l'étirage d'un fluide viscoélastique (type polymère fondu) dans la direction x. En prenant l'origine du repère sur l'axe de l'écoulement, on écrit que le champ de vitesse est de la forme (voir remarque sur l'expérience de *Trouton* au chapitre 5) :

$$\left(u = \dot{\alpha}x,\ v = -\frac{\dot{\alpha}y}{2},\ w = -\frac{\dot{\alpha}z}{2}\right)$$

Le fluide a un comportement viscoélastique décrit par la loi de *Maxwell*.

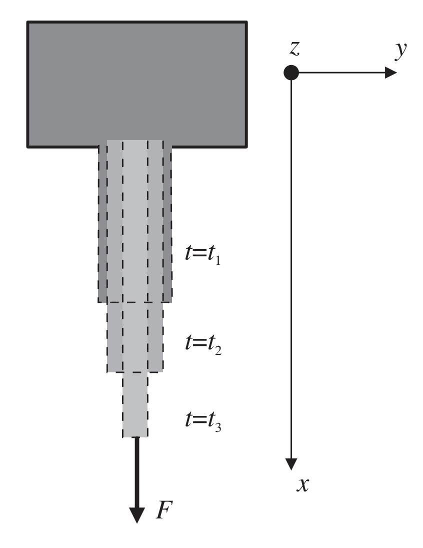


Figure 6.16

Partie A : étude en régime permanent

1. Exprimer le tenseur des contraintes.

2. Exprimer la viscosité élongationnelle du liquide.

3. Montrer qu'il existe une valeur particulière $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_c$ qui dépend du temps de relaxation λ où cette viscosité devient infinie.

Partie B : étude en régime transitoire

4. On suppose que toutes les contraintes sont nulles à l'instant initial où on applique le taux d'élongation $\dot{\alpha}$. Exprimer la contrainte $\sigma_{xx}(t)$ ainsi que la viscosité élongationnelle $\mu_e(\dot{\alpha},t)$.

Solutions

6.1

1. Les hypothèses d'écoulement plan et unidirectionnel associées à l'équation de continuité montrent que le champ de vitesse est de la forme : $\vec{u} = (u_x(y), 0, 0)$. La loi-puissance pour un fluide pseudoplastique lie la contrainte de cisaillement au taux de cisaillement sous la forme :

$$s_{xy} = K|\dot{\gamma}|^{m-1}\dot{\gamma} = K\left|\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}y}\right|^{m-1}\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}y} \qquad (6.16)$$

En remplaçant cette expression dans le bilan local de quantité de mouvement, on trouve :

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x} + K\frac{d}{dy}\left(\left|\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}y}\right|^{m-1}\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}y}\right) \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \qquad (6.17)$$

On trouve donc l'expression de la pression sous la forme : $p(x) = \Delta p\left(1 - \frac{x}{L}\right)$

(qui est donc la même que pour un fluide newtonien).
Avec les conditions aux limites en vitesse :

$$\begin{aligned} u_x(y = h/2) &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}r}(y = 0) &= 0 \end{aligned} \qquad (6.18)$$

on intègre la première égalité de la relation (6.17), ce qui conduit à :

$$u_x(y) = \frac{m}{m+1}\left(\frac{\Delta p}{K\,L}\right)^{1/m}\left(\frac{h^{(m+1)/m}}{2} - \left(y - \frac{h}{2}\right)^{(m+1)/m}\right) \qquad (6.19)$$

2. Le débit volume par unité de largeur des plaques est :

$$Q_v = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u_x(y)\mathrm{d}y = \frac{m}{2(2m+1)}\left(\frac{\Delta p}{2K\,L}\right)^{1/m} h^{(2m+1)/m} \qquad (6.20)$$

6.2

1. Le champ de vitesse est de la forme : $\vec{u} = (u_x(y) = \dot{\gamma}\,y, 0, 0)$.

Comme le régime d'écoulement est permanent et uniforme, on a :

$$\frac{d\overline{\overline{\sigma}}'}{dt} = \frac{\partial\overline{\overline{\sigma}}'}{\partial t} + u_x \frac{\partial\overline{\overline{\sigma}}'}{\partial x} = 0$$

D'autre part :

$$\overline{\overline{\nabla}}\vec{u}\,\overline{\overline{\sigma}}' = \begin{bmatrix} \dot{\gamma}\sigma'_{12} & \dot{\gamma}\sigma'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et :

$$\overline{\overline{\sigma}}'\overline{\overline{\nabla}}\vec{u} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma}\sigma'_{12} & 0 & 0 \\ \dot{\gamma}\sigma'_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc :

$$\frac{\delta\overline{\overline{\sigma}}'}{\delta t} = \begin{bmatrix} -2\dot{\gamma}\sigma'_{12} & -\dot{\gamma}\sigma'_{22} & 0 \\ -\dot{\gamma}\sigma'_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La loi de *Maxwell* nous conduit à :

$$\begin{cases} \sigma'_{11} - 2\dot{\gamma}\lambda\sigma'_{12} = 0 \\ \sigma'_{12} - \dot{\gamma}\lambda\sigma'_{22} = \mu\dot{\gamma} \\ \sigma'_{22} = 0 \\ \sigma'_{33} = 0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\sigma'_{11} = 2\,\lambda\mu\dot{\gamma}^2$$
$$\sigma'_{12} = \mu\dot{\gamma}$$

Finalement le tenseur des contraintes est :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\sigma}}' - p'\overline{\overline{I}} = \begin{bmatrix} 2\,\lambda\mu\dot{\gamma}^2 - p' & \mu\dot{\gamma} & 0 \\ \mu\dot{\gamma} & -p' & 0 \\ 0 & 0 & -p' \end{bmatrix}$$

Bien que l'on retrouve la contrainte de cisaillement classique pour l'écoulement newtonien : $\tau_{xy} = \sigma_{12} = \sigma'_{12} = \mu\dot{\gamma}$, on observe aussi une différence de contrainte normale propre au comportement viscoélastique :

$$N_1(\dot{\gamma}) = \sigma_{11} - \sigma_{22} = 2\,\lambda\mu\dot{\gamma}^2$$

On voit par contre que :

$$N_2(\dot{\gamma}) = \sigma_{22} - \sigma_{33} = \sigma'_{22} - \sigma'_{33} = 0$$

2. On retrouve le comportement newtonien lorsque la différence de contraintes normales devient négligeable devant la contrainte de cisaillement :

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} \ll \sigma_{12}$$

Ceci est donc vérifié lorsque :

$$\lambda\,\dot{\gamma} \ll 1$$

3. La pression hydrostatique est :

$$p = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\left(\overline{\overline{\sigma}}\right) = p' - \frac{2}{3}\lambda\mu\dot{\gamma}^2$$

6.3

1. Le champ de vitesse est de la forme : $\vec{u} = \left(0, r\Omega(z), 0\right)$. Le tenseur des vitesses de déformation est donc :

$$\overline{\overline{\dot{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\dot{\gamma}}{2} \\ 0 & \dfrac{\dot{\gamma}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

où le taux de cisaillement est $\dot{\gamma} = r\dfrac{\mathrm{d}\Omega(z)}{\mathrm{d}z}$.

De manière générale, le tenseur des contraintes est :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ 0 & \sigma_{\theta z} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

2. On trouve :

$$\overline{\overline{\nabla}}\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega(z) & 0 \\ \Omega(z) & 0 & r\dfrac{\mathrm{d}\Omega(z)}{\mathrm{d}z} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui conduit à :

$$\overline{\overline{\nabla}}\vec{u}\,\overline{\overline{\sigma}}' + \overline{\overline{\sigma}}'\left(\overline{\overline{\nabla}}\vec{u}\right)^t = \begin{bmatrix} 0 & \Omega(z)(\sigma'_{rr} - \sigma'_{\theta\theta}) & -\Omega(z)\sigma'_{\theta z} \\ \Omega(z)(\sigma'_{rr} - \sigma'_{\theta\theta}) & 2r\dfrac{\mathrm{d}\Omega(z)}{\mathrm{d}z}\sigma'_{\theta z} & r\dfrac{\mathrm{d}\Omega(z)}{\mathrm{d}z}\sigma'_{zz} \\ -\Omega(z)\sigma'_{\theta z} & r\dfrac{\mathrm{d}\Omega(z)}{\mathrm{d}z}\sigma'_{zz} & 0 \end{bmatrix}$$

D'autre part (voir annexe mathématique) :

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}}'}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega(z)(\sigma'_{rr} - \sigma'_{\theta\theta}) & -\Omega(z)\sigma'_{\theta z} \\ \Omega(z)(\sigma'_{rr} - \sigma'_{\theta\theta}) & 0 & 0 \\ -\Omega(z)\sigma'_{\theta z} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On trouve donc l'expression de la dérivée convective sous la forme :

$$\frac{\delta\overline{\overline{\sigma}}'}{\delta t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2r\dfrac{\mathrm{d}\Omega(z)}{\mathrm{d}z}\sigma'_{\theta z} & r\dfrac{\mathrm{d}\Omega(z)}{\mathrm{d}z}\sigma'_{zz} \\ 0 & r\dfrac{\mathrm{d}\Omega(z)}{\mathrm{d}z}\sigma'_{zz} & 0 \end{bmatrix}$$

3. La loi de comportement de *Maxwell* donnée à la relation (6.15) conduit donc à :

$$\begin{cases} \sigma'_{rr} = 0 \\ \sigma'_{\theta\theta} - 2\lambda r\dfrac{\mathrm{d}\Omega(z)}{\mathrm{d}z}\sigma'_{\theta z} = 0 \\ \sigma'_{\theta z} - \lambda r\dfrac{\mathrm{d}\Omega(z)}{\mathrm{d}z}\sigma'_{zz} = \mu r\dfrac{\mathrm{d}\Omega(z)}{\mathrm{d}z} \\ \sigma'_{zz} = 0 \end{cases}$$

Et par conséquent :

$$\overline{\overline{\sigma}}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu\lambda\left[r\dfrac{\mathrm{d}\Omega(z)}{\mathrm{d}z}\right]^2 & \mu r\dfrac{\mathrm{d}\Omega(z)}{\mathrm{d}z} \\ 0 & \mu r\dfrac{\mathrm{d}\Omega(z)}{\mathrm{d}z} & 0 \end{bmatrix}$$

Le tenseur des contraintes est alors :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -p' & 0 & 0 \\ 0 & -p' + 2\mu\lambda\left[r\dfrac{\mathrm{d}\Omega(z)}{\mathrm{d}z}\right]^2 & \mu r\dfrac{\mathrm{d}\Omega(z)}{\mathrm{d}z} \\ 0 & \mu r\dfrac{\mathrm{d}\Omega(z)}{\mathrm{d}z} & -p' \end{bmatrix}$$

4. L'équation de conservation de la quantité de mouvement conduit (on néglige le poids du fluide) à :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \dfrac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

La deuxième relation nous donne $\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}z} = C^{te}$, soit : $\Omega(z) = \omega \dfrac{z}{h}$.

La troisième équation implique que p' ne dépend que de r.
Ainsi la première relation conduit à :

$$\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}r} = -2\mu\lambda\left(\frac{\omega}{h}\right)^2 r$$

5. La condition limite est : $\sigma'_{rr}(R) = -p'(R) = -p_a$. On peut donc intégrer la relation obtenue à la question **4.** et ceci conduit à :

$$p'(r) = p_a + \mu\lambda\left(\frac{\omega}{h}\right)^2 (R^2 - r^2)$$

La condition limite au centre donne alors :

$$p'_0 - p_a = \mu\lambda\left(\frac{\omega}{h}R\right)^2$$

6. La force F qui tend à écarter les 2 disques est :

$$F = \iint_S \sigma_{zz}\,\mathrm{d}S = 2\pi\int_0^R p'(r)\,\mathrm{d}r = \frac{\pi\mu\lambda}{2}\left(\frac{\omega}{h}\right)^2 R^4 = (p'_0 - p_a)\frac{\pi R^2}{2}$$

Cette force est une conséquence directe de l'effet *Weissenberg*.
Le couple C nécessaire à la rotation du disque est :

$$C = \iint_S \sigma_{\theta z}\, r\,\mathrm{d}S = 2\pi\int_0^R \frac{\mu r}{2}\frac{\omega}{h} r^2\,\mathrm{d}r = \frac{\pi\mu}{2}\frac{\omega}{h}R^4$$

7. On constate que le rapport F/C est égal à $\lambda\omega/h$. En mesurant le couple et la force d'écartement, il est alors théoriquement possible d'en déduire le temps de relaxation λ.

6.4

1. Le champ de vitesse est de la forme : $\vec{u} = (0, v(r), 0)$. On trouve :

$$\overline{\overline{\nabla}}\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega(z) & 0 \\ \Omega(z) & 0 & r\dfrac{\mathrm{d}\Omega(z)}{\mathrm{d}z} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le tenseur $\overline{\overline{\sigma}}'$ est de la forme :

$$\overline{\overline{\sigma}}' = \begin{bmatrix} \sigma'_{rr} & \sigma'_{r\theta} & 0 \\ \sigma'_{r\theta} & \sigma'_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{zz} \end{bmatrix}$$

D'autre part la dérivée de $\overline{\overline{\sigma}}'$ est (voir annexe mathématique) :

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}}'}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 2\dfrac{v}{r}\sigma'_{r\theta} & \dfrac{v}{r}(\sigma'_{rr} - \sigma'_{\theta\theta}) & 0 \\ \dfrac{v}{r}(\sigma'_{rr} - \sigma'_{\theta\theta}) & 2\dfrac{v}{r}\sigma'_{r\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On trouve donc l'expression de la dérivée convective sous la forme :

$$\frac{\delta\overline{\overline{\sigma}}'}{\delta t} = \begin{bmatrix} 0 & \left(\dfrac{v}{r} - \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)\sigma'_{rr} & 0 \\ \left(\dfrac{v}{r} - \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)\sigma'_{rr} & 2\left(\dfrac{v}{r} - \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)\sigma'_{r\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La loi de comportement de *Maxwell* donnée à la relation (6.15) conduit donc à :

$$\begin{cases} \sigma'_{rr} = 0 \\ \sigma'_{r\theta} - \lambda\left(\dfrac{v}{r} - \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)\sigma'_{rr} = -\mu\left(\dfrac{v}{r} - \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) \\ \sigma'_{\theta\theta} + 2\lambda\left(\dfrac{v}{r} - \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)\sigma'_{r\theta} = 0 \\ \sigma'_{zz} = 0 \end{cases}$$

Donc la solution est :

$$\overline{\overline{\sigma}}' = \begin{bmatrix} 0 & -\mu\left(\frac{v}{r} - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) & 0 \\ -\mu\left(\frac{v}{r} - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) & 2\lambda\mu\left(\frac{v}{r} - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Le tenseur des contraintes est alors :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -p' & -\mu\left(\frac{v}{r} - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) & 0 \\ -\mu\left(\frac{v}{r} - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) & -p' + 2\lambda\mu\left(\frac{v}{r} - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & -p' \end{bmatrix}$$

Les 3 fonctions viscométriques sont donc :

$$\begin{cases} \tau(\dot{\gamma}) = -\mu\left(\frac{v}{r} - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) \\ N_1(\dot{\gamma}) = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 2\lambda\mu\left(\frac{v}{r} - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)^2 \\ N_2(\dot{\gamma}) = \sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 0 \end{cases}$$

3. La conservation de quantité de mouvement conduit à :

$$\begin{cases} -\frac{\partial p'}{\partial r} - 2\lambda\mu\left(\frac{v}{r} - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)^2 = 0 \\ \mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} - \frac{v}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial p'}{\partial \theta} + \frac{2\mu}{r}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} - \frac{v}{r}\right) = 0 \\ \frac{\partial p'}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

La deuxième relation correspond exactement à celle que nous avons trouvée pour le cas newtonien (voir chapitre 5) et donc nous trouvons :

$$v(r) = \frac{\omega R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\frac{R_2^2 - r^2}{r}$$

4. En intégrant la première relation nous trouvons l'expression de p' :

$$p' = 2\mu\lambda\omega^2\frac{(R_1 R_2)^2}{R_2^2 - R_1^2}\frac{1}{r^4} + C^{te}$$

Nous savons que la contrainte suivant z équilibre le poids du fluide. Ceci nous permet donc d'écrire :

$$\sigma_{zz} = -p' = -2\mu\lambda\omega^2 \frac{(R_1 R_2)^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r^4} + C^{te} = -\rho g h(r)$$

Ce qui nous permet d'exprimer la variation de la surface libre :

$$h(r) = \frac{2\mu\lambda\omega^2}{\rho g} \frac{(R_1 R_2)^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r^4} + C^{te}$$

La variation de hauteur entre le cylindre intérieur et le cylindre extérieur est donc finalement :

$$\Delta h = h(R_1) - h(R_2) = \frac{2\mu\lambda\omega^2}{\rho g} \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r^4}$$

6.5

Partie A : régime permanent

1. Le champ de vitesse nous conduit à exprimer le tenseur des vitesses de déformation :

$$\overline{\overline{\dot{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\dot{\alpha}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\dot{\alpha}}{2} \end{bmatrix}$$

On admet alors que le tenseur des contraintes a une forme identique à celui des vitesses de déformation :

$$\overline{\overline{\sigma'}} = \begin{bmatrix} \sigma'_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{zz} \end{bmatrix}$$

La dérivée convective est :

$$\frac{\delta\overline{\overline{\sigma'}}}{\delta t} = \frac{d\overline{\overline{\sigma'}}}{dt} - \overline{\overline{\nabla}}\vec{u}\,\overline{\overline{\sigma'}} - \overline{\overline{\sigma'}}\left(\overline{\overline{\nabla}}\vec{u}\right)^t$$

Avec (application de la dérivée particulaire) :

$$\frac{d\overline{\overline{\sigma'}}}{dt} = \frac{\partial\overline{\overline{\sigma'}}}{\partial t} + \vec{u}\,\vec{\nabla}\overline{\overline{\sigma'}}$$

Comme on se place en régime permanent $\dfrac{\partial \overline{\overline{\sigma}}'}{\partial t} = 0$ et que le taux d'élongation $\dot{\alpha}$ est constant $\left(\Rightarrow \dfrac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} = \dfrac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y} = \dfrac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial z} = 0\right)$ on trouve alors $\dfrac{d\overline{\overline{\sigma}}'}{dt} = 0$. Comme $\overline{\overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{\nabla}}\vec{u} = \left(\overline{\overline{\nabla}}\vec{u}\right)^t$, on voit que la dérivée convective est finalement :

$$\frac{\delta \overline{\overline{\sigma}}'}{\delta t} = -2\overline{\overline{\nabla}}\vec{u}\,\overline{\overline{\sigma}}' = \begin{bmatrix} -2\dot{\alpha}\sigma'_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\alpha}\sigma'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\alpha}\sigma'_{zz} \end{bmatrix}$$

La loi de comportement de *Maxwell* donnée à la relation (6.15) conduit donc à :

$$\begin{cases} \sigma'_{xx} - 2\dot{\alpha}\lambda\sigma'_{xx} = 2\mu\dot{\alpha} \\ \sigma'_{yy} + \dot{\alpha}\lambda\sigma'_{yy} = -\mu\dot{\alpha} \\ \sigma'_{zz} + \dot{\alpha}\lambda\sigma'_{zz} = -\mu\dot{\alpha} \end{cases}$$

Et donc :

$$\overline{\overline{\sigma}}' = \begin{bmatrix} \dfrac{2\mu\dot{\alpha}}{1-2\dot{\alpha}\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\mu\dot{\alpha}}{1+\dot{\alpha}\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\mu\dot{\alpha}}{1+\dot{\alpha}\lambda} \end{bmatrix}$$

On constate que σ'_{xx} n'existe que si $\dot{\alpha}\lambda \neq \dfrac{1}{2}$. Le tenseur des contraintes est alors :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -p' + \dfrac{2\mu\dot{\alpha}}{1-2\dot{\alpha}\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & -p' - \dfrac{\mu\dot{\alpha}}{1+\dot{\alpha}\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & -p' - \dfrac{\mu\dot{\alpha}}{1+\dot{\alpha}\lambda} \end{bmatrix}$$

2. Aucune contrainte n'est appliquée suivant y et z donc : $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$ ce qui conduit à : $p' = -\dfrac{\mu\dot{\alpha}}{1+\dot{\alpha}\lambda}$ et donc : $\sigma_{xx} = \dfrac{3\mu\dot{\alpha}}{(1+\dot{\alpha}\lambda)(1-2\dot{\alpha}\lambda)}$. Ceci nous conduit à la viscosité élongationnelle :

$$\mu_e = \frac{\sigma_{xx}}{\dot{\alpha}} = \frac{3\mu}{(1+\dot{\alpha}\lambda)(1-2\dot{\alpha}\lambda)}$$

3. On constate que cette viscosité devient infinie si $\dot{\alpha} = \frac{1}{2\lambda}$. On remarque aussi qu'elle devient négative si $\dot{\alpha} > \frac{1}{2\lambda}$, ce qui n'a pas de sens physique. En effet, si le taux d'étirage devient plus grand que l'inverse du temps caractéristique λ du fluide cela signifie que les macromolécules ne vont pas avoir le temps de s'étirer et que le comportement élastique ne pourra pas se manifester.

Partie B : régime transitoire

4. En supposant que les contraintes restent uniformes dans l'évolution transitoire depuis l'instant initial jusqu'à l'instant t, nous devons donc seulement rajouter aux précédentes équations de Maxwell le terme transitoire :

$$\begin{cases} \sigma'_{xx} + \lambda \dfrac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial t} - 2\dot{\alpha}\lambda\sigma'_{xx} = 2\mu\dot{\alpha} \\ \sigma'_{yy} + \lambda \dfrac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial t} + \dot{\alpha}\lambda\sigma'_{yy} = -\mu\dot{\alpha} \\ \sigma'_{zz} + \lambda \dfrac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial t} + \dot{\alpha}\lambda\sigma'_{zz} = -\mu\dot{\alpha} \end{cases}$$

On résout chaque équation en utilisant les conditions initiales : $\sigma'_{xx}(t=0) = \sigma'_{yy}(t=0) = \sigma'_{zz}(t=0) = 0$. Deux cas se présentent alors : $\dot{\alpha} \neq \frac{1}{2\lambda}$ et $\dot{\alpha} = \frac{1}{2\lambda}$.

- Cas $\dot{\alpha} \neq \frac{1}{2\lambda}$, la solution des équations différentielles conduit à :

$$\begin{cases} \sigma'_{xx} = \dfrac{2\mu\dot{\alpha}}{1-2\dot{\alpha}\lambda}\left(1 - e^{-\frac{1-2\dot{\alpha}\lambda}{\lambda}t}\right) \\ \sigma'_{yy} = \sigma'_{zz} = -\dfrac{\mu\dot{\alpha}}{1+\dot{\alpha}\lambda}\left(1 - e^{-\frac{1+\dot{\alpha}\lambda}{\lambda}t}\right) \end{cases}$$

On constate que si $\dot{\alpha} < \frac{1}{2\lambda}$, l'argument de l'exponentielle est négatif et $\sigma'_{xx} = \frac{2\mu\dot{\alpha}}{1-2\dot{\alpha}\lambda}$ quand $t \to \infty$. Si $\dot{\alpha} > \frac{1}{2\lambda}$, $\sigma'_{xx} \to \infty$ quand $t \to \infty$.

On en déduit comme en régime permanent que comme $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$ alors $p' = -\sigma'_{yy}$ et donc : $\sigma_{xx} = \sigma'_{xx} - \sigma'_{yy} = \dfrac{2\mu\dot{\alpha}}{1-2\dot{\alpha}\lambda}\left(1 - e^{-\frac{1-2\dot{\alpha}\lambda}{\lambda}t}\right) + \dfrac{\mu\dot{\alpha}}{1+\dot{\alpha}\lambda}\left(1 - e^{-\frac{1+\dot{\alpha}\lambda}{\lambda}t}\right)$. Ceci nous conduit à définir la viscosité élongationnelle transitoire :

$$\mu_e = \frac{\sigma_{xx}}{\dot{\alpha}} = \frac{2\mu}{1-2\dot{\alpha}\lambda}\left(1 - e^{-\frac{1-2\dot{\alpha}\lambda}{\lambda}t}\right) + \frac{\mu}{1+\dot{\alpha}\lambda}\left(1 - e^{-\frac{1+\dot{\alpha}\lambda}{\lambda}t}\right)$$

- Cas $\dot{\alpha} = \dfrac{1}{2\lambda}$, la résolution des équations de Maxwell conduit à :

$$\begin{cases} \lambda \dfrac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial t} = 2\mu\dot{\alpha} \Rightarrow \sigma'_{xx} = \dfrac{2\mu\dot{\alpha}}{\lambda}t \\ \sigma'_{yy} = \sigma'_{yy} = -\dfrac{2\dot{\alpha}\mu}{3}\left(1 - e^{-\frac{3}{2\lambda}t}\right) \end{cases}$$

Donc $\sigma_{xx} = \sigma'_{xx} - \sigma'_{yy} = \dfrac{2\mu\dot{\alpha}}{\lambda}t + \dfrac{2\dot{\alpha}\mu}{3}\left(1 - e^{-\frac{3}{2\lambda}t}\right)$, ce qui permet de définir la viscosité élongationnelle : $\mu_e = \dfrac{\sigma_{xx}}{\dot{\alpha}} = \dfrac{2\mu}{\lambda}t + \dfrac{2\mu}{3}\left(1 - e^{-\frac{3}{2\lambda}t}\right)$.

Bibliographie

AGASSANT J.-F., AVENAS P., SERGENT J.-P., VERGNES B., VINCENT M., *La mise en forme des matières plastiques*, LAVOISIER, Tech & Doc, Paris, 1996.

DES JARDINS D., TOUZET-CORTINA M., *Introduction à la mécanique des milieux continus ; cours et exercices corrigés*, DUNOD, 1999.

7

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET PRINCIPE DE SIMILITUDE

PLAN

OBJECTIFS

- Définition des différents nombres adimensionnels
- Méthode de détermination des nombres Pi
- Similitude basée sur les équations de transport

7.1 INTRODUCTION

Lorsque les dimensions de tous les termes d'une équation sont égales, l'équation est dite dimensionnellement correcte. Dans ce cas, quel que soit le système d'unités utilisé, l'équation a un sens physique. Si un phénomène est trop compliqué tel qu'il est difficile à le décrire mathématiquement, l'*analyse dimensionnelle* peut être appliquée afin d'identifier des groupes de variables qui apparaîtraient dans ce modèle mathématique. En complétant cette connaissance par des données expérimentales, une relation analytique entre ces groupements peut être construite permettant l'exécution de calculs numériques.

Dans le cas d'écoulements de fluide, les différentes variables mises en jeu sont : la pression, la vitesse, la géométrie et les propriétés du fluide. Les variables peuvent être nombreuses, deux questions se posent alors :

1. Comment appliquer les résultats de test de laboratoire (maquette) au problème réel (prototype) ?

2. Est-il possible de réduire le nombre important d'expériences avec les mêmes objectifs ?

La réponse à ces deux questions est le *principe de similitude* décrit par le tableau ci-dessous :

Tableau 7.1 – **Principe de similitude.**

Similitude complète	Similitude géométrique	dimensions
	Similitude dynamique	mouvement
	Similitude cinématique	forces

7.1.1 Similitude géométrique

Si l_1 et l_2 sont deux dimensions caractéristiques d'un objet quelconque, la similitude géométrique implique que :

$$\frac{l_{1m}}{l_{1p}} = \frac{l_{2m}}{l_{2p}} = l_r \tag{7.1}$$

où les indices m, p et r correspondent aux modèles, prototype et rapport respectivement (l_r est un nombre sans dimension).

Remarque

La similitude géométrique ne peut exister jusqu'au moindre détail : j/R (jeux relatifs), ε/R (rugosités relatives, où ε est la rugosité absolue et R est le rayon d'une partie de la machine), sont plus importants sur les petites machines que sur les grosses.

7.1.2 Similitude cinématique

Elle fait intervenir le mouvement, donc la vitesse (longueur/temps). Si on note l_r le rapport d'échelles et t_r le rapport des temps correspondants, on obtient alors la vitesse l_r / t_r et l'accélération l_r / t_r^2.

Dans la mesure où les conditions aux limites imperméables représentent aussi des lignes de courant alors les écoulements cinématiquement similaires ne sont possibles qu'à travers des conditions aux limites géométriquement similaires.

7.1.3 Similitude dynamique

Les amplitudes des forces en deux points en similitude sont dans un rapport fixé. On peut lister les amplitudes de ces forces par :

- La force d'inertie :

$$\left|\vec{F_i}\right| \propto m\left|\vec{a}\right| \propto \rho l^3 \frac{U^2}{l} = \rho l^2 U^2 \tag{7.2}$$

- La force visqueuse :

$$\left|\vec{F_v}\right| \propto \mu S\left|\frac{d\vec{u}}{dy}\right| \propto \mu l^2 \frac{U}{l} = \mu U l \tag{7.3}$$

- La force de pression :

$$\left|\vec{F_p}\right| \propto \Delta P\ l^2 \tag{7.4}$$

- La force de gravité :

$$\left|\vec{F_g}\right| \propto \left|m\vec{g}\right| \propto \rho l^3 g \tag{7.5}$$

- La force capillaire (ou tension de surface) :

$$\left|\vec{F_c}\right| \propto \sigma l \tag{7.6}$$

- La force élastique (ou de compressibilité) : pour une compression donnée, il y a une augmentation de la pression (donc une diminution de volume) qui est proportionnelle au module d'élasticité E ($\Delta P \propto E$) et donc :

$$\left|\vec{F_e}\right| \propto E l^2 \tag{7.7}$$

7.1.4 Écoulements gouvernés par les forces visqueuses, de pression et d'inertie

On peut écrire que :

$$\frac{\text{Force visqueuse}}{\text{Force d'inertie}} = \frac{\left|\vec{F_v}\right|}{\left|\vec{F_i}\right|} = \frac{\mu U l}{\rho l^2 U^2} = \frac{\nu}{U l} = \frac{1}{Re} \tag{7.8}$$

avec Re le *nombre de Reynolds*.

$$\frac{\text{Force de pression}}{\text{Force d'inertie}} = \frac{\left|\vec{F_P}\right|}{\left|\vec{F_i}\right|} = \frac{\Delta P l^2}{\rho l^2 U^2} = \frac{\Delta P}{\rho U^2} = Eu \tag{7.9}$$

avec Eu le *nombre d'Euler*.

Les nombres Re et Eu représentent le critère de similitude dynamique pour les écoulements affectés seulement par les forces visqueuses, de pression et d'inertie.

Le nombre de *Reynolds* est le nombre le plus connu en mécanique des fluides. Le nom est en l'honneur d'*Osborne Reynolds* (1842-1912), un ingénieur britannique qui le premier démontra que cette combinaison de variables peut être utilisée comme un critère afin de distinguer un écoulement laminaire d'un écoulement turbulent. Le nombre de *Reynolds* mesure le rapport des effets d'inertie sur les effets visqueux. Lorsque ces deux forces sont importantes dans un écoulement donné alors le nombre de *Reynolds*

jouera un rôle important. Cependant, s'il est petit ($Re \ll 1$) alors les forces visqueuses sont dominantes et il est possible de négliger les effets d'inertie. Les écoulements à des nombres de *Reynolds* très petits sont généralement appelés écoulements lents. Pour les écoulements à très grands nombres de *Reynolds*, les effets visqueux sont très faibles devant les effets inertiels et il est alors possible de négliger les effets de viscosité et considérer l'écoulement comme non visqueux.

Le nombre d'*Euler* peut être interprété comme le rapport des efforts de pression à ceux d'inertie où ΔP (ou P) est la pression caractéristique dans l'écoulement considéré. Le nombre d'*Euler* est utilisé dans des problèmes où la pression (ou la différence de pression) entre deux points est une variable importante. Le nombre d'*Euler* provient de *Leonhard Euler* (1707-1783) un mathématicien suisse qui a été le premier à étudier la relation entre la pression et l'écoulement (représenté par la vitesse).

Exemple

Écoulement autour d'un profil d'aile d'avion, écoulement dans une conduite fermée (la longueur caractéristique correspond au diamètre hydraulique : $l = D_h = 4S/P$), …

La similitude dynamique équivaut à écrire :

$$\frac{\rho_p \; l_p U_p}{\mu_p} = \frac{\rho_m \; l_m U_m}{\mu_m} \text{ et } \frac{\Delta P_p}{\rho_p U_p^2} = \frac{\Delta P_m}{\rho_m U_m^2}$$

où les indices « p » et « m » représentent respectivement le prototype et le modèle.

7.1.5 Écoulements avec forces de gravité, de pression et d'inertie

Les exemples de ce type d'écoulements sont : l'écoulement d'un liquide dans un canal ouvert, l'écoulement ondulatoire causé par le passage d'un bateau dans l'eau…

Les conditions de similitude pour ces écoulements sont :

- égalité des nombres d'*Euler* du prototype et du modèle,
- égalité du rapport des forces de gravité et d'inertie.

$$\frac{\text{Force de gravité}}{\text{Force d'inertie}} = \frac{|\vec{F_g}|}{|\vec{F_i}|} = \frac{g \; l}{U^2} = \frac{1}{F_r^2}$$

où $F_r = U/\sqrt{g\,l}$ est le nombre de Froude et par conséquent

$$\frac{(g\,l_p)^{1/2}}{U_p} = \frac{(g\,l_m)^{1/2}}{U_m} \tag{7.10}$$

La gravité devient une variable importante dans les problèmes de mécanique des fluides dans lesquels le poids du fluide est une force importante. Comme indiqué précédemment, le nombre de *Froude* mesure le rapport de la force d'inertie au poids de l'élément fluide. Il aura de l'importance dans les écoulements à surfaces libres puisque la gravité affecte principalement ce type d'écoulement. Le nombre de Froude a été nommé en l'honneur de *William Froude* (1810-1879), un ingénieur anglais en Génie Civil,

mathématicien et architecte naval et qui a révolutionné la conception des bateaux avec l'utilisation des remorquages des réservoirs.

7.1.6 Écoulements avec tension de surface comme force dominante

Les exemples de ce type d'écoulements sont : l'écoulement à onde capillaire, les écoulements de films liquides sur une surface solide, la formation de gouttes et bulles…

On écrit que :

$$\frac{\text{Force d'inertie}}{\text{Force capillaire}} = \frac{|\vec{F_i}|}{|\vec{F_c}|} = \frac{\rho l^2 U^2}{\sigma l} = \frac{\rho l U^2}{\sigma} = W_e$$

où *We* est le *nombre de Weber*. De la même façon que précédemment, on a :

$$\frac{\rho_m l_m U_m^2}{\sigma_m} = \frac{\rho_p l_p U_p^2}{\sigma_p}$$

Le nombre de *Weber* a une importance dans les problèmes où il existe une interface entre deux fluides. Dans ce cas la tension de surface peut jouer un rôle important. Ce nombre correspond au rapport entre la force d'inertie et celle de la force capillaire agissant sur le fluide. Néanmoins, tous les problèmes faisant intervenir une interface ne font pas appel à la tension de surface. L'écoulement de l'eau dans une rivière n'est pas affecté de façon significative par la tension de surface puisque les effets inertiels et de gravité sont dominants ($W_e \gg 1$) comparés à ceux de la tension de surface. Le nombre de *Weber* doit son nom à *Moritz Weber* (1871-1951) un professeur allemand de mécanique navale qui a formalisé l'utilisation générale des nombres sans dimension comme la base des études de similitude.

7.1.7 Écoulements à force élastique

On définit : $$\frac{\text{Force d'inertie}}{\text{Force élastique}} = \frac{|\vec{F_i}|}{|\vec{F_e}|} = \frac{\rho l^2 U^2}{E l^2} = \frac{\rho U^2}{E} = C_a$$

où *Ca* est le *nombre de Cauchy*. Dans le cas d'un écoulement isentropique :

$$\frac{|\vec{F_i}|}{|\vec{F_e}|} = \frac{\rho\, U^2}{E_s}$$

où E_s est le module d'élasticité isentropique (voir Chapitre 1). Donc :

$$\frac{\rho_m U_m^2}{(E_s)_m} = \frac{\rho_p U_p^2}{(E_s)_p} \qquad (7.11)$$

Et la vitesse du son est définie (voir Chapitre 1) par $c = \sqrt{E_s/\rho}$ et par conséquent, toujours dans le cas isentropique :

$$Ca = \frac{\rho V^2}{E_s} = \frac{V^2}{c^2} = Ma^2$$

où $Ma = U/c$ est le *nombre de Mach*. Par conséquent, l'un des deux nombres (pas les deux à la fois) peut être utilisé dans les problèmes où les effets compressibles sont importants. Les deux nombres peuvent être interprétés comme représentant un index du rapport des forces d'inertie à celles liées à la compressibilité. Lorsque le nombre de *Mach* est faible (< 0.33), les forces d'inertie issues de l'écoulement de fluide ne sont pas suffisamment importantes pour causer un changement significatif de la masse volumique du fluide et dans ce cas la compressibilité du fluide peut être négligée. Le nombre de *Mach* est le plus couramment utilisé pour les écoulements compressibles, particulièrement dans les domaines de la dynamique des gaz et l'aérodynamique. Le nombre de *Cauchy* doit son nom à *Augustin Louis de Cauchy* (1789-1857), un ingénieur français, mathématicien et hydrodynamicien et le nombre de Mach à *Ernst Mach* (1836-1916), un physicien et philosophe autrichien.

7.1.8 Écoulements oscillatoires

Les écoulements instationnaires avec des oscillations temporelles pour lesquelles la fréquence d'oscillation est ω sont caractérisés par le nombre sans dimension $St = \omega l/U$ qui est le *nombre de Strouhal*. Il représente une mesure du rapport des forces d'inertie dues à l'instationnarité de l'écoulement (accélération locale) aux forces d'inertie dues aux changements de vitesse d'un point à un autre dans l'écoulement (accélération convective). Ce type d'écoulement instationnaire peut se développer dans le cas d'écoulements autour d'obstacles (pile de pont, câble…). Par exemple, dans une certaine gamme de valeurs du nombre de Reynolds, un écoulement périodique peut se développer à l'aval de l'écoulement autour d'un cylindre par exemple. Des tourbillons sont générés périodiquement avec une fréquence ω nommés tourbillons de *von Karman* (*Theodor von Karman* (1881-1963), mécanicien des fluides renommé). Lorsque cette fréquence est dans les limites de l'audible, un son peut être entendu et les objets donnent l'impression de « chanter ». Le nombre de Strouhal est nommé en l'honneur de *Vincenz Strouhal* (1850-1922) qui a utilisé ce paramètre dans son étude sur les « cordes chantantes ». Un exemple dramatique de ce type d'écoulement est celui de la catastrophe du pont de Tacoma Narrows aux États-Unis. La fréquence de la génération des tourbillons a coïncidé avec celle de la fréquence naturelle du pont, entraînant un phénomène de résonance et l'effondrement de ce pont. Il y a aussi d'autres types d'écoulements oscillatoires. Par exemple, l'écoulement du sang dans les artères est périodique et peut être analysé en décomposant ce mouvement périodique en une série de composantes harmoniques (par analyse de Fourier), chaque composante ayant une fréquence multiple de la fréquence fondamentale. Au lieu d'utiliser le nombre de *Strouhal* dans ce type de problèmes, un groupement sans dimension, formé par le produit de *St* et *Re* (appelé aussi le *nombre de Womersley*, *Wo*), est utilisé dans ce cas :

$$Wo = St \;\; Re = \frac{\rho \omega l^2}{\mu}$$

7.1.9 Dimensions des quantités physiques

Dans le Système International, les quantités physiques primaires sont : la masse (M), le temps (T) et la longueur (L),…

Exemple :

La *contrainte visqueuse* a les dimensions suivantes :

$$\tau = \left[\frac{\text{Force}}{\text{Surface}}\right] = \frac{[\text{Masse} \times \text{Accélération}]}{[\text{Surface}]} = \frac{\text{M L T}^{-2}}{\text{L}^2} = \text{M L}^{-1}\,\text{T}^{-2}$$

et la *viscosité* (sachant que la contrainte visqueuse $\tau \propto \mu(\mathrm{d}U/\mathrm{d}y)$)

$$\mu = \left[\frac{\tau}{\mathrm{d}U/\mathrm{d}y}\right] = \frac{\text{M L}^{-1}\,\text{T}^{-2}}{\frac{\text{L}}{\text{T}}\;\frac{1}{\text{L}}} = \text{M L}^{-1}\,\text{T}^{-1}$$

7.2 Théorème de Vashy-Buckingham

Théorème de Vashy-Buckingham

Si un phénomène physique fait intervenir n grandeurs $E_1, E_2, \ldots, E_n$ qui se mesurent avec « p » unités indépendantes, alors une relation $f(E_1, E_2, \ldots, E_n) = 0$ peut se mettre sous la forme $F(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-p}) = 0$.
Il y a $(n-p)$ groupements indépendants sans dimensions $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-p}$ $(n > p)$.
Ce théorème constitue le théorème de *Vashy-Buckingham* (ou Pi-*Buckingham*).

7.2.1 Constitution du système linéaire

Dans la mesure où il y a « n » grandeurs et « p » unités, on écrit le système de « p » équations linéaires algébriques avec « n » variables :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots a_{pn}x_n = b_p \end{cases} \tag{7.12}$$

Le système (2) peut aussi s'écrire sous la forme matricielle suivante : $A\,x = b$, avec :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots a_{2n} \\ \vdots & \cdots\cdots\cdots \vdots \\ a_{\mathrm{p}1} & a_{\mathrm{p}2} \cdots\cdots a_{\mathrm{p}n} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}$$

7.2.2 Détermination des termes π

$$\left\{\begin{array}{l} \pi_1 = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \cdots x_p^{a_{1p}} \quad x_{p+1} \\ \pi_2 = x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \cdots x_p^{a_{2p}} \quad x_{p+2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \pi_{n-p} = x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \cdots x_p^{a_{pp}} \quad x_{p+n-p} \end{array}\right. \tag{7.13}$$

Les nombres $(\pi_1, \cdots, \pi_{n-p})$ sont sans dimensions ($M^0\,L^0\,T^0$). On identifie les dimensions des paramètres $x_1, \cdots, x_p$ et on résout le système des $(n–p)$ équations linéaires afin de trouver les nombres $(\pi_1, \cdots, \pi_{n-p})$.

7.3 Similitude basée sur les équations de transport

Bien que la simplicité de la précédente approche soit assez attractive, il n'en reste pas moins que l'omission d'une ou plusieurs variables peut entraîner de sérieux problèmes dans la conception du modèle. Une autre approche consiste à obtenir les lois de similitude directement à partir des équations de transport (continuité, mouvement, énergie…).

Considérons un écoulement incompressible d'un fluide newtonien. Afin de simplifier l'écriture, on se limitera à un écoulement 2D en coordonnées cartésiennes bien que les résultats soient applicables au cas 3D. Les équations de continuité et de *Navier-Stokes* peuvent s'écrire (voir chapitre 5) :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \\ \rho\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right) \\ \rho\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_y}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\right) - \rho g \end{array}\right. \tag{7.14}$$

où l'axe y est vertical de telle sorte que la gravité n'apparaît que dans l'équation suivant y. Ces équations sont accompagnées des conditions aux limites et conditions initiales données. On désire rendre ces équations sans dimension. Pour cela on choisit des quantités de référence (ou caractéristiques) : vitesse U, pression P_0, longueur L et temps τ. Ces quantités doivent être des paramètres du problème étudié. Par exemple la longueur L peut représenter la dimension caractéristique d'un objet immergé dans un écoulement ou la largeur d'un canal à travers duquel s'écoule un fluide. La vitesse peut être la vitesse d'entrée dans une conduite par exemple. Les nouvelles variables sans dimension s'expriment par :

$$u_x^* = \frac{u_x}{U} \;;\; u_y^* = \frac{u_y}{U} \;;\; p^* = \frac{p}{P_0} \;;\; x^* = \frac{x}{L} \;;\; y^* = \frac{y}{L} \;;\; t^* = \frac{t}{\tau} \tag{7.15}$$

Les équations précédentes peuvent alors s'écrire en fonction de ces variables sans dimension. Par exemple :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial\left(u_x^* U\right)}{\partial\left(x^* L\right)} = \frac{U}{L}\frac{\partial u_x^*}{\partial x^*} \text{ et } \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial\left(x^* L\right)}\left(\frac{U}{L}\frac{\partial u_x^*}{\partial x^*}\right) = \frac{U}{L^2}\frac{\partial^2 u_x^*}{\partial x^{*2}} \quad (7.16)$$

Les autres expressions qui apparaissent dans les équations peuvent être exprimées d'une façon similaire. Les équations adimensionnelles peuvent alors s'écrire comme :

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial u_x^*}{\partial x} + \dfrac{\partial u_y^*}{\partial y} = 0 \\
\left[\dfrac{\rho U}{\tau}\right]\dfrac{\partial u_x^*}{\partial t^*} + \left[\dfrac{\rho U^2}{L}\right]\left(u_x^*\dfrac{\partial u_x^*}{\partial x^*} + u_y^*\dfrac{\partial u_y^*}{\partial y^*}\right) = -\left[\dfrac{P_0}{L}\right]\dfrac{\partial p^*}{\partial x^*} + \left[\dfrac{\mu U}{L^2}\right]\left(\dfrac{\partial^2 u_x^*}{\partial x^{*2}} + \dfrac{\partial^2 u_x^*}{\partial y^{*2}}\right) \\
\underbrace{\left[\dfrac{\rho U}{\tau}\right]}_{F_{Il}}\dfrac{\partial u_y^*}{\partial t^*} + \underbrace{\left[\dfrac{\rho U^2}{L}\right]}_{F_{Ic}}\left(u_x^*\dfrac{\partial u_y^*}{\partial x^*} + u_y^*\dfrac{\partial u_y^*}{\partial y^*}\right) = -\underbrace{\left[\dfrac{P_0}{L}\right]}_{F_P}\dfrac{\partial p^*}{\partial y^*} + \underbrace{\left[\dfrac{\mu U}{L^2}\right]}_{F_V}\left(\dfrac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \dfrac{\partial^2 u_y^*}{\partial y^{*2}}\right) - \underbrace{\rho g}_{F_G}
\end{array}\right. \quad (7.17)$$

Les termes apparaissant entre crochets contiennent les quantités de référence et peuvent être interprétés comme des forces par unité de volume mises en jeu, autrement dit des densités volumiques de forces. Ces forces sont : F_{Il} force d'inertie locale, F_{Ic} force d'inertie convective, F_P force de pression, F_V force de viscosité et F_G force de gravité. On divise les équations du mouvement du système par $\rho U^2/L$ pour obtenir :

$$\left\{\begin{array}{l}
\left[\dfrac{L}{\tau U}\right]\dfrac{\partial u_x^*}{\partial t^*} + \left(u_x^*\dfrac{\partial u_x^*}{\partial x^*} + u_y^*\dfrac{\partial u_x^*}{\partial y^*}\right) = -\left[\dfrac{P_0}{\rho U^2}\right]\dfrac{\partial p^*}{\partial x^*} + \left[\dfrac{\mu}{\rho UL}\right]\left(\dfrac{\partial^2 u_x^*}{\partial x^{*2}} + \dfrac{\partial^2 u_x^*}{\partial y^{*2}}\right) \\
\left[\dfrac{L}{\tau U}\right]\dfrac{\partial u_y^*}{\partial t^*} + \left(u_x^*\dfrac{\partial u_y^*}{\partial x^*} + u_y^*\dfrac{\partial u_y^*}{\partial y^*}\right) = -\left[\dfrac{P_0}{\rho U^2}\right]\dfrac{\partial p^*}{\partial y^*} + \left[\dfrac{\mu}{\rho UL}\right]\left(\dfrac{\partial^2 u_y^*}{\partial x^{*2}} + \dfrac{\partial^2 u_y^*}{\partial y^{*2}}\right) - \dfrac{gL}{U^2}
\end{array}\right. \quad (7.18)$$

Nous voyons que les termes entre crochets représentent des nombres sans dimension connus : $L/\tau U$ est le nombre de *Strouhal*, $P_0/\rho U^2$ est le nombre d'*Euler*, gL/U^2 est l'inverse du nombre de *Froude* au carré et $\mu/\rho U L$ est l'inverse du nombre de *Reynolds*. De cette analyse, il est clair que chacun de ces nombres sans dimension peut être interprété comme le rapport de deux forces. Il est à noter que ces variables sans dimension apparaissent naturellement dans ces équations et qu'il est impossible d'en oublier, sauf dans le cas où les équations initiales sont incorrectement écrites et/ou mal définies.

Le système d'équations (7.18) peut être réécrit avec ces nombres sans dimension comme :

$$\left\{\begin{array}{l}
St\dfrac{\partial u_x^*}{\partial t^*} + u_x^*\dfrac{\partial u_x^*}{\partial x^*} + u_y^*\dfrac{\partial u_x^*}{\partial y^*} = -Eu\dfrac{\partial p^*}{\partial x^*} + \dfrac{1}{Re}\Delta u_x^* \\
St\dfrac{\partial u_y^*}{\partial t^*} + u_x^*\dfrac{\partial u_y^*}{\partial x^*} + u_y^*\dfrac{\partial u_y^*}{\partial y^*} = -Eu\dfrac{\partial p^*}{\partial y^*} + \dfrac{1}{Re}\Delta u_y^* - \dfrac{1}{Fr^2}
\end{array}\right. \quad (7.19)$$

Si l'écoulement est de type *Bernoulli*, la pression P_0 peut être approximée comme ρV^2 (ou $\rho U^2/2$) et le nombre d'*Euler* peut être éliminé des conditions de similitude.

Le nombre de *Froude*, qui apparaît à cause de la gravité est important pour des problèmes avec une surface libre. On peut citer comme exemples, l'étude d'écoulements dans des rivières, l'écoulement autour des piles de ponts ou l'étude de la traînée autour de bateaux. Dans ces exemples, la forme de la surface libre est influencée par la gravité et donc le nombre de *Froude* devient un paramètre important. Cependant, s'il n'y pas de surface libre, le seul effet de la gravité est de superposer une distribution de pression hydrostatique sur la distribution de pression créée par le mouvement du fluide. Mais cette distribution de pression hydrostatique peut être éliminée des équations en définissant une nouvelle pression $p' = p - \rho g y$ et avec ce changement, le nombre de *Froude* n'apparaît plus dans les équations sans dimension.

En conclusion de cette discussion, pour un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible sans surfaces libres, il n'existe qu'une similitude de *Reynolds* (pour des systèmes géométriquement similaires). Lorsqu'une surface libre existe et si les effets de tension de surface ne sont pas négligeables alors son effet apparaîtra dans la condition aux limites de la surface libre et donc un nombre adimensionnel supplémentaire (nombre de *Weber*, $\rho U^2/\sigma$, où σ est la tension de surface vue précédemment) apparaîtra dans l'analyse de similitude. De plus, si des fluides compressibles étaient considérés, alors le nombre de *Mach* (U/c) fera partie d'un nombre sans dimension additionnel.

7.4 Exemples d'application

7.4.1 Écoulement incompressible dans une conduite cylindrique

On considère un écoulement incompressible dans une conduite cylindrique (voir Figure 7.1). On cherche à déterminer les nombres sans dimension qui caractérisent cet écoulement.

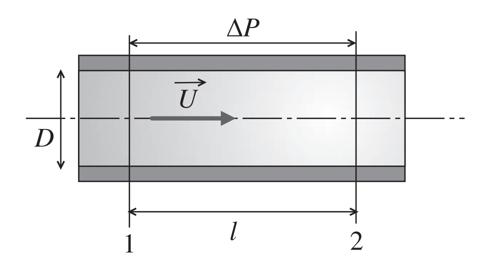


Figure 7.1 – Écoulement dans une conduite cylindrique.

On dénombre $n = 7$ grandeurs : ΔP, ρ, μ, D, U, h, l (h représente ici la hauteur de la rugosité) et $p = 3$; il y a donc $(n-p) = (7-3) = 4$ paramètres π.

Donc :

$$\begin{cases} \pi_1 = \rho^{a_1}\ U^{b_1} \cdots D^{c_1}\ \Delta P \\ \pi_2 = \rho^{a_2}\ U^{b_2} \cdots D^{c_2}\ \mu \\ \pi_3 = \rho^{a_3}\ U^{b_3} \cdots D^{c_3}\ h \\ \pi_4 = \rho^{a_4}\ U^{b_4} \cdots D^{c_4}\ l \end{cases}$$

Or $[\rho] = \mathrm{ML^{-3}}$; $[U] = \mathrm{LT^{-1}}$; $[D] = \mathrm{L}$; $[\Delta P] = \mathrm{ML^{-1}T^{-2}}$; $[\mu] = \mathrm{ML^{-1}T^{-1}}$; $[h] = \mathrm{L}$; $[l] = \mathrm{L}$. Par conséquent pour le nombre sans dimensions π_1, on écrit :

$$\mathrm{M^0 L^0 T^0} = (\mathrm{ML^{-3}})^{a_1}\ (\mathrm{LT^{-1}})^{b_1}\ \mathrm{L}^{c_1}\ (\mathrm{ML^{-1}T^{-2}})$$

D'où le système linéaire suivant à résoudre :

$$\begin{cases} 0 = a_1 + 1 \\ 0 = -3a_1 + b_1 + c_1 - 1 \\ 0 = -b_1 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ c_1 = 0 \\ b_1 = -2 \end{cases}$$

Avec la même démarche, on obtient pour les autres nombres sans dimension π :

$$\begin{cases} a_2 = -1; & b_2 = -1; & c_2 = -1 \\ a_3 = 0; & b_3 = 0; & c_3 = -1 \\ a_4 = 0; & b_4 = 0; & c_4 = -1 \end{cases}$$

Par conséquent, les nombres π s'obtiennent par :

$$\pi_1 = \frac{\Delta P}{\rho U^2}\ ;\ \pi_2 = \frac{\mu}{\rho UD}\ ;\ \pi_3 = \frac{h}{D}\ ;\ \pi_4 = \frac{l}{D}$$

Soit en écrivant $\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \pi_4)$, on obtient la relation suivante :

$$\frac{\Delta P}{\rho U^2} = f\left(\frac{\mu}{\rho UD}, \frac{h}{D}, \frac{l}{D}\right)$$

Or $\rho UD/\mu = Re$ (nombre de *Reynolds*) et $\Delta P/\rho U^2 = Eu \Rightarrow Eu = f(Re, h/D, l/D)$ est la relation liant les différents nombres π déterminés par la méthode de Pi-*Buckingham* ; *h/D* représente ici la rugosité relative.

7.4.2 Écoulement incompressible autour d'une sphère

On considère la résistance d'une sphère placée dans un écoulement uniforme comme montré sur la figure 7.2. Dans ce cas les effets des forces de gravité pourront être négligés devant les effets inertiels. Les quantités physiques influençant la traînée T de cette sphère sont : le diamètre d de la sphère, la vitesse U de l'écoulement autour de cette sphère, la masse volumique ρ et la viscosité dynamique μ. Dans ce cas, $n = 5$, $p = 3$ et par conséquent, il y a $(n{-}p) = 5{-}3 = 2$ groupements π sans dimension. On sélectionne

ρ, U et d comme 3 variables physiques dimensionnellement indépendantes. Le premier groupement sans dimension π, formé avec T donne :

$$\pi_1 = T\ \rho^{a_1}U^{b_1}d^{c_1} = [\mathrm{L\ M\ T^{-2}}][\mathrm{L^{-3}\ M}]^{a_1}[\mathrm{L\ T^{-1}}]^{b_1}[\mathrm{L}]^{c_1} = \mathrm{L}^{1-3a_1+b_1+c_1}\mathrm{M}^{1+a_1}\mathrm{T}^{-2-b_1}$$

Et donc suivant les 3 unités [L, M, T], on obtient :

$$\begin{cases} \mathrm{L}: & 1-3a_1+b_1+c_1 = 0 \\ \mathrm{M}: & 1+a_1 = 0 \\ \mathrm{T}: & -2-b_1 = 0 \end{cases}$$

La résolution du système ci-dessus donne : $a_1 = -1;\ b_1 = -2;\ c_1 = -2$

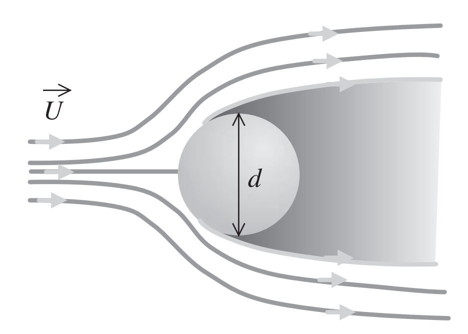


Figure 7.2 – **Écoulement autour d'une sphère.**

D'où $\pi_1 = T/\rho U^2 d^2 \equiv C_D$. Ce nombre π représente en fait le coefficient de traînée pour un écoulement autour d'un obstacle (ici autour d'une sphère, voir chapitre 10)

Le deuxième groupement π sans dimension peut être déterminé par :

$$\pi_2 = \mu\ \rho^{a_2}U^{b_2}d^{c_2} = [\mathrm{ML^{-1}T^{-1}}][\mathrm{L^{-3}\ M}]^{a_2}[\mathrm{L\ T^{-1}}]^{b_2}[\mathrm{L}]^{c_2} = \mathrm{L}^{-1-3a_2+b_2+c_2}\mathrm{M}^{1+a_2}\mathrm{T}^{-1-b_2}$$

Et donc suivant les 3 unités [L, M, T], on obtient :

$$\begin{cases} \mathrm{L}: & -1-3a_2+b_2+c_2 = 0 \\ \mathrm{M}: & 1+a_2 = 0 \\ \mathrm{T}: & -1-b_2 = 0 \end{cases}$$

La résolution du système ci-dessus donne : $a_2 = -1;\ b_2 = -1;\ c_2 = -1$

D'où $\pi_2 = \mu/\rho U d = \nu/Ud \equiv 1/Re$. Ce nombre π représente l'inverse du nombre de Reynolds. Notre analyse dimensionnelle de l'écoulement autour d'une sphère a montré que le coefficient de traînée dépend du nombre de *Reynolds* de l'écoulement : $C_D = f(Re)$.

Exercices

7.1 Agitateur

Un agitateur de diamètre D requiert une puissance P et tourne à une vitesse de rotation N dans un liquide de masse volumique ρ et de viscosité μ.

1. Montrer avec l'aide du théorème de Pi-*Buckingham* que $P = \rho N^3 D^5 \ \phi(\rho N D^2/\mu)$.

Un agitateur de diamètre D_1 = 225 mm tournant à N_1 = 23 tr/s dans l'eau requiert un couple de C_1 = 1,1 N·m.

2. Calculer la vitesse correspondante pour faire tourner un agitateur similaire de 675 mm de diamètre tournant dans l'air.

3. Calculer le couple requis.

Données :

Viscosités : (air) $\mu_2 = 1{,}86 \times 10^{-5}$ Pa.s, (eau) $\mu_1 = 1{,}01 \times 10^{-3}$ Pa.s,
Masses volumiques : (air) $\rho_2 = 1{,}2\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, (eau) $\rho_1 = 1\ 000\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

7.2 Écoulement de Couette

Un écoulement laminaire incompressible et développé entre deux plaques planes dont l'une se déplace avec une vitesse uniforme U par rapport à l'autre est connu sous le nom d'écoulement de *Couette* (voir Chapitre 5). Dans cet écoulement, la vitesse $u(y)$ en un point dépend de y (mesuré perpendiculairement aux plaques), de la distance de séparation h entre les plaques, de la vitesse relative entre les plaques, du gradient de pression dp/dx imposé à l'écoulement et de la viscosité μ du fluide. Trouver une relation sous forme adimensionnelle en exprimant U en termes des variables indépendantes comme décrit précédemment.

7.3 Maquette d'avion

Une maquette d'avion est réalisée à l'échelle 1/10. Elle décolle à la vitesse de 50 km/h. En négligeant l'influence des variations du nombre de *Reynolds* sur C_z (coefficient de portance), calculer la vitesse de décollage du prototype. On supposera aussi que la maquette et le prototype sont construits avec les mêmes matériaux.

7.4

La traînée d'un avion volant à 387 km·h^{-1} dans l'air à basse altitude (conditions standards) doit être déterminée à partir des tests d'un modèle sur une échelle 1/10e dans une soufflerie pressurisée. Afin de minimiser les effets de compressibilité, la vitesse de l'air dans la soufflerie est aussi prise égale à 387 km·h^{-1}. Déterminer la pression de l'air requise dans la soufflerie (en supposant la même température de l'air pour le modèle et le prototype) et la traînée du prototype correspondant à une force mesurée de 4,5 N sur le modèle.

Solutions

7.1

1. On dénombre 5 variables : P, N, D, ρ et $\mu \Rightarrow F(P, N, D, \rho, \mu) = 0$. On a 3 dimensions fondamentales pour décrire ce problème : M, L et T. Il y a donc 5–3 = 2 nombres π. On choisit 3 quantités dimensionnellement indépendantes : N, D et ρ. Par conséquent :

$$\begin{cases} \pi_1 = P\ N^a D^b \rho^c \\ \pi_2 = \mu\ N^a D^b \rho^c \end{cases}$$

Les dimensions de P et μ sont : $[P] = [Force][Vitesse] = \mathrm{MLT^{-2}\ LT^{-1}} = \mathrm{ML^2T^{-3}}$ et $[\mu] = [\nu][\rho] = \mathrm{L^2T^{-1}ML^{-3}} = \mathrm{ML^{-1}T^{-1}}$. D'où :

$$\begin{cases} \mathrm{M^0L^0T^0} = (\mathrm{T^{-1}})^a\, \mathrm{L}^b\, (\mathrm{ML^{-3}})^c\, \mathrm{ML^2T^{-3}} & (1) \\ \mathrm{M^0L^0T^0} = (\mathrm{T^{-1}})^a\, \mathrm{L}^b\, (\mathrm{ML^{-3}})^c\, \mathrm{ML^{-1}T^{-1}} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} 0 = c + 1 \\ 0 = b - 3c + 2 \\ 0 = -a - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -5 \\ c = -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad (2) \Rightarrow \begin{cases} 0 = c + 1 \\ 0 = b - 3c - 1 \\ 0 = -a - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} \pi_1 = P\ N^{-3} D^{-5} \rho^{-1} \\ \pi_2 = \mu\ N^{-1} D^{-2} \rho^{-1} \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{P}{\rho N^3 D^5}, \frac{\mu}{\rho N D^2}\right) = 0$$

$$\text{Et donc : } \psi\left(\frac{P}{\rho N^3 D^5}, \frac{\rho N D^2}{\mu}\right) = 0$$

$$\text{Ceci entraîne } \frac{P}{\rho N^3 D^5} = \phi\left(\frac{\rho N D^2}{\mu}\right)$$

Par conséquent : $P = \rho N^3 D^5\ \phi(\rho N D^2/\mu)$

2. On a :

$$\frac{\rho_2 N_2 D_2^2}{\mu_2} = \frac{\rho_1 N_1 D_1^2}{\mu_1} \Rightarrow N_2 = N_1 \frac{\mu_2}{\mu_1}\left(\frac{D_1}{D_1}\right)^2 \frac{\rho_1}{\rho_2} = 23 \times \frac{1{,}86}{1{,}01} 10^{-2} \left(\frac{225}{675}\right)^2 \times \frac{10^3}{1{,}2}$$

$$\Rightarrow N_2 = 39{,}2 \text{ tr/s}$$

et

$$\frac{P_2}{\rho_2 N_2^3 D_2^5} = \frac{P_1}{\rho_1 N_1^3 D_1^5} \Rightarrow P_2 = P_1 \frac{\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^3 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^5 \Rightarrow C_2\omega_2 = C_1\omega_1 \frac{\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^3 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^5$$

Donc : $C_2 = C_1 \dfrac{\rho_2}{\rho_1}\left(\dfrac{N_2}{N_1}\right)^2\left(\dfrac{D_2}{D_1}\right)^5 = 1{,}1 \times \dfrac{1{,}2}{10^3}\left(\dfrac{39{,}2}{23}\right)^2\left(\dfrac{675}{225}\right)^5 \Rightarrow C_2 = 0{,}93 \text{ N.m}$

7.2

On a 6 variables : $u, U, y, h, \mathrm{d}p/\mathrm{d}x, \mu$ et 3 dimensions fondamentales : M, L, T. Il y a donc (6–3) = 3 nombres π. Soient U, h et μ les 3 variables dimensionnellement indépendantes. D'où :

$$\begin{cases} \pi_1 = u\, U^{a_1} h^{b_1} \mu^{c_1} \\ \pi_2 = y\, U^{a_2} h^{b_2} \mu^{c_2} \\ \pi_2 = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\, U^{a_3} h^{b_3} \mu^{c_3} \end{cases}$$

Or $\left[\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right] = \dfrac{[F/S]}{L} = \dfrac{\mathrm{MLT^{-2}}}{\mathrm{L^3}} = \mathrm{ML^{-2}T^{-2}}$.

D'où : $$\begin{cases} M^0 L^0 T^0 = (\mathrm{LT^{-1}})^{a_1}\, \mathrm{L}^{b_1}\, (\mathrm{ML^{-1}T^{-1}})^{c_1}\, \mathrm{LT^{-1}} & (1) \\ \mathrm{M^0L^0T^0} = (\mathrm{LT^{-1}})^{a_2}\, L^{b_2}\, (\mathrm{ML^{-1}T^{-1}})^{c_2}\, \mathrm{L} & (2) \\ \mathrm{M^0L^0T^0} = (\mathrm{LT^{-1}})^{a_3}\, \mathrm{L}^{b_3}\, (\mathrm{ML^{-1}T^{-1}})^{c_3}\, \mathrm{ML^{-2}T^{-2}} & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} 0 = c_1 \\ 0 = a_1 + b_1 - c_1 + 1 \\ 0 = -a_1 - c_1 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ b_1 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \pi_1 = u\, U^{-1}$$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} 0 = c_2 \\ 0 = a_2 + b_2 - c_2 + 1 \\ 0 = -a_2 - c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \\ b_2 = -1 \\ c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \pi_2 = \frac{y}{h}$$

$$(3) \Rightarrow \begin{cases} 0 = c_3 + 1 \\ 0 = a_3 + b_3 - c_3 - 2 \\ 0 = -a_3 - c_3 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = -1 \\ b_3 = +2 \\ c_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \pi_3 = \frac{\mathrm{d}p / \mathrm{d}x}{\mu U / h^2}$$

Par conséquent : $f\left(\dfrac{u}{U}, \dfrac{y}{h}, \dfrac{\mathrm{d}p / \mathrm{d}x}{\mu U / h^2}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{u}{U} = F\left(\dfrac{y}{h}, \dfrac{\mathrm{d}p / \mathrm{d}x}{\mu U / h^2}\right)$

Remarques :

(i) Les équations de *Navier-Stokes* donnent la solution suivante (voir chapitre 5) :

$$\frac{u}{U} = \frac{y}{h} - \left(\frac{h^2}{2\mu U}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)\frac{y}{h}\left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

Le théorème de π ne peut jamais déterminer la forme explicite de cette solution de *Navier-Stokes* obtenue analytiquement.

(ii) Les deux premiers nombres sans dimension peuvent s'obtenir assez simplement sans passer par les développements π.

7.3 Au décollage, le poids s'équilibre avec la portance $\Leftrightarrow P = F_z$

Or $F_z = C_z \frac{1}{2}\rho S \frac{U^2}{2} = P$

On a les mêmes conditions d'incidence, donc C_z ne varie pas ; de plus la masse volumique est la même (air). Donc :

$$\frac{P_m}{P_p} = \frac{S_m U_m^2}{S_p U_p^2}$$

Si la maquette et le prototype sont construits avec les mêmes matériaux $\Rightarrow$ le poids est proportionnel au volume donc : $P_m/P_p = L_p^2/L_p^2$, L étant la dimension caractéristique.
Les surfaces alaires sont proportionnelles à $L^2 \Rightarrow S_m/S_p = L_p^2/L_p^2$.
Donc :

$$\frac{S_m U_m^2}{S_p U_p^2} = \frac{L_m^3}{L_p^3} \text{ et } \frac{U_m}{U_p} = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} \Rightarrow U_p = U_m \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} = 50\sqrt{10} = 158\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$$

7.4 La traînée peut être déduite d'un modèle géométriquement similaire si les nombres de Reynolds du modèle et du prototype sont identiques. On a donc :

$$\frac{\rho_m U_m l_m}{\mu_m} = \frac{\rho_p U_p l_p}{\mu_p}$$

Pour cet exemple, $U_m = U_p$ et $l_m/l_p = 1/l_0$. Donc :

$$\frac{\rho_m}{\rho_p} = \frac{\mu_m U_p l_p}{\mu_p U_m l_m} = \frac{\mu_m}{\mu_p} \times 10$$

Ce résultat montre que le même fluide ($\rho_p = \rho_m$, $\mu_p = \mu_m$) ne peut pas être utilisé si on veut que la similitude du nombre de *Reynolds* soit maintenue. Une possibilité est de pressuriser la soufflerie afin d'augmenter la masse volumique de l'air. On suppose qu'une augmentation de pression ne change pas de façon significative la viscosité de telle sorte qu'une augmentation de masse volumique est donnée par la relation : $\rho_m/\rho = 10$. Pour un gaz idéal, $P = \rho rT$ et par conséquent : $P_m/P = \rho_m/\rho = 10$ dans le cas d'une transformation isotherme. Puisque le prototype fonctionne dans les conditions atmosphériques, la pression requise pour le modèle est de 10 atm (ou 10 bar). On voit qu'une pression importante est requise (conditions difficiles et coûteuses). Sous ces conditions de similitude de *Reynolds*, on peut obtenir la traînée par :

$$\frac{T_p}{\frac{1}{2}\rho_p U_p^2 l_p^2} = \frac{T_m}{\frac{1}{2}\rho_m U_m^2 l_m^2}$$

D'où :

$$T_p = \frac{\rho_p}{\rho_m}\left(\frac{U_p}{U_m}\right)^2\left(\frac{l_p}{l_m}\right)^2 T_m = \frac{1}{10}(1)^2\,(10)^2\,T_m = 10 \times T_m$$

Donc pour une traînée de 4,5 N sur le modèle, la traînée correspondante sur le prototype est de $T_p = 45\ N$.

Bibliographie

BATCHELOR G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.

GERMAIN P., *Mécanique*, tome 1, Ellipse École Polytechnique, Paris, 1986.

FORTIER A., *Mécanique des fluides et transfert de chaleur et de masse par convection*, MASSON, 1975

TURBULENCE 8

PLAN

OBJECTIFS

- Introduire la notion d'écoulement turbulent
- Montrer qu'il se décompose en un mouvement moyen et des fluctuations
- Montrer l'application des équations de Navier-Stokes pour un écoulement turbulent
- Définir la viscosité turbulente de Boussinesq
- Introduire le modèle de longueur de mélange de Prandtl
- Montrer une application aux écoulements à grands nombres de Reynolds dans les conduites.

8.1 INTRODUCTION

Par définition, un *mouvement turbulent* est irrégulier. L'irrégularité associée à la turbulence est telle qu'elle peut être décrite par des lois de probabilités. L'écoulement turbulent peut être défini à travers les différentes quantités (par exemple les composantes de la vitesse et la pression) qui montrent une variation aléatoire avec le temps et l'espace de telle sorte que la moyenne statistique de ces quantités peut être exprimée quantitativement. Il est montré que les fluctuations provenant de ce mouvement aléatoire viennent des perturbations (dues à la rugosité de la surface par exemple) et peuvent être soit amorties par *dissipation visqueuse* soit amplifiées en pompant de l'énergie à partir de l'écoulement au loin. Pour un nombre de *Reynolds* inférieur à un nombre de *Reynolds* critique, l'énergie cinétique de l'écoulement n'est pas suffisante pour soutenir les fluctuations aléatoires contre les efforts visqueux et donc pour ces cas l'hypothèse d'un écoulement laminaire reste valable. Dans le cas contraire, la transition vers la turbulence prend place et c'est l'objet de ce chapitre.

8.2 Les caractéristiques de la turbulence

La caractéristique principale d'un mouvement turbulent vient du fait que les vitesses et pression en un point fluctuent avec le temps de façon aléatoire (voir Figure 8.1).

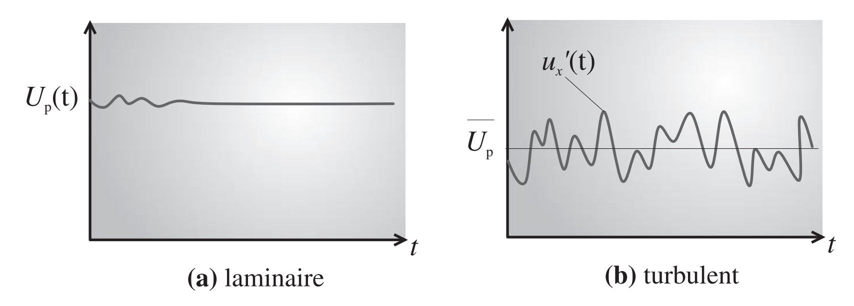


Figure 8.1 – **Variation d'une des composantes de la vitesse pour des écoulements (a) laminaire et (b) turbulent en un point P.**

Le mélange dans un écoulement turbulent est dû à ces fluctuations qui donnent un profil de vitesses qui est plus uniforme en moyenne que dans le cas d'un écoulement laminaire dans un tube (voir Figure 8.2).

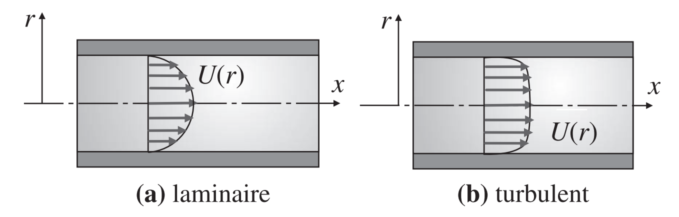


Figure 8.2 – **Comparaison des profils de vitesse dans un tube à écoulement (a) laminaire et (b) turbulent.**

La turbulence peut être créée par les forces de viscosité sur les parois (*turbulence pariétale*) ou par les différentes couches de l'écoulement et qui sont à des vitesses différentes les unes par rapport aux autres (*turbulence libre*).

Un des effets de la viscosité sur la turbulence est de rendre l'écoulement plus homogène et moins dépendant de la direction. Si la turbulence a la même structure dans toutes les parties du champ d'écoulement alors la turbulence est dite *homogène*. La turbulence est dite *isotrope* si statistiquement parlant, l'écoulement n'a pas de direction préférentielle et que le désordre « parfait » existe. Ces fluctuations de vitesse sont indépendantes de l'axe de référence, c'est-à-dire invariantes par rapport à l'axe de rotation et à la réflexion. La turbulence isotrope est par définition toujours homogène. Dans une telle situation, le gradient de la vitesse moyenne est nul (la vitesse moyenne est soit nulle soit constante). Lorsque le gradient de cette vitesse moyenne existe alors la turbulence est appelée turbulence *anisotrope*.

Le terme turbulence homogène implique que les fluctuations de vitesse dans le système sont aléatoires. Si on considère la moyenne quadratique des *fluctuations de vitesse* : $u'_x = \sqrt{\overline{u_x^2}}$, $u'_y = \sqrt{\overline{u_y^2}}$, $u'_z = \sqrt{\overline{u_z^2}}$ alors en turbulence homogène ces vitesses u'_x, u'_y et u'_z peuvent être différentes, mais chaque valeur est constante sur le champ entier de turbulence. En revanche, les valeurs instantanées de u_x, u_y et u_z peuvent différer d'un point à un autre à chaque instant.

En turbulence isotrope, les fluctuations sont indépendantes de la direction et dans ce cas : $\sqrt{\overline{u_x^2}} = \sqrt{\overline{u_y^2}} = \sqrt{\overline{u_z^2}}$ ou $u'_x = u'_y = u'_z$.

En général, la turbulence engendre un mélange plus efficace et produit donc un effet de diffusion supplémentaire. Le terme de diffusion turbulente est souvent employé pour distinguer de la diffusion moléculaire. À des nombres de Reynolds élevés, il y a un transport continu d'énergie de l'écoulement libre aux gros tourbillons. Puis, à partir des gros tourbillons de petits tourbillons sont continûment formés. Enfin près de la paroi ces petits tourbillons dissipent l'énergie et s'autodétruisent.

8.3 La transition laminaire-turbulent

Pour un écoulement turbulent sur une plaque plane (voir Figure 8.3), la couche limite démarre avec un écoulement laminaire au bord d'attaque et par la suite la transition vers un écoulement turbulent s'opère et se transforme en un écoulement pleinement turbulent à la fin. L'épaisseur de la *couche limite turbulente* augmente avec une toute petite région près de la paroi appelée sous-couche visqueuse qui elle est laminaire. En fait, à une certaine distance du bord d'attaque, la couche limite tend à devenir instable. Physiquement, cela veut dire que les perturbations dans l'écoulement croissent en amplitude à cet endroit.

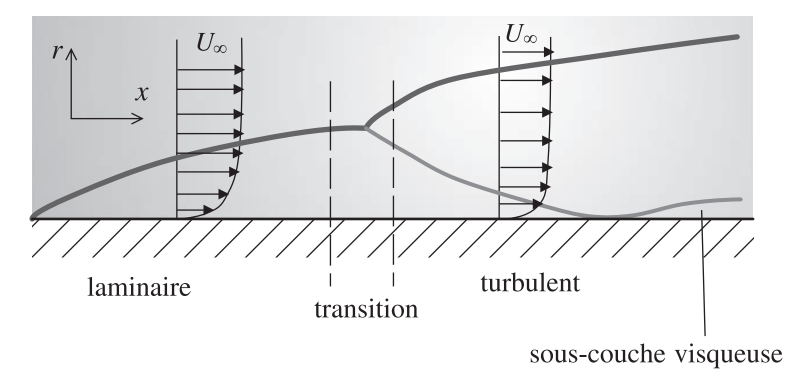


Figure 8.3 – Transition laminaire-turbulent.

Les perturbations peuvent provenir de la turbulence au sein de l'écoulement libre ou de la rugosité à la paroi par exemple. La transition à l'écoulement turbulent est donc initiée par l'instabilité à partir de l'écoulement laminaire. Dans le cas d'un écoulement

dans un tube cylindrique, la turbulence est généralement observée pour un Reynolds ($Re = U_\infty D/\nu$) entre de 2000 et 2700.

8.4 Fonctions de corrélation, mouvement moyen et fluctuations

En turbulence, une corrélation statistique peut être appliquée en termes de fluctuation de vitesse. Par définition, le mouvement turbulent est un mouvement formé d'un ensemble de tourbillons. Un fort degré de corrélation existe entre les vitesses en deux points de l'espace si la distance entre ces points est plus petite que le diamètre du tourbillon.

On considère une propriété statistique d'une variable aléatoire (vitesse suivant *x* par exemple) en deux points séparés par la distance *r*. La corrélation en ces deux points est définie par $\overline{u'_x(x)\, u'_x(x+r)}$. En d'autres termes, la dépendance entre ces deux vitesses aux deux points considérés est mesurée par des corrélations, c'est-à-dire les moyennes temporelles des produits de ces quantités prises aux deux points. Conventionnellement, on utilise la forme adimensionnelle de la corrélation :

$$R(r) = \frac{\overline{u'_x(x)u'_x(x+r)}}{\left(\overline{u'^2_x}(x)\overline{u'^2_x}(x+r)\right)^{1/2}} \tag{8.1}$$

L'interprétation de l'équation est primordiale dans la compréhension des phénomènes physiques de la statistique de la turbulence. La valeur de $R(r)$ égale à l'unité signifie une corrélation parfaite de ces deux quantités et les mouvements des points concernés sont en phase. Une valeur négative de la fonction de corrélation implique que le signe est différent de la moyenne en temps des vitesses en ces deux points corrélés. Un exemple de l'évolution de $R(r)$ est montré sur la figure 8.4.

En 1883, *O. Reynolds* a conduit des expériences dans le cas d'un écoulement dans un tube en y adjoignant du colorant. Pour de faibles nombres de Reynolds, le colorant a suivi une ligne droite sans dispersion. En augmentant le débit (donc la vitesse), le colorant s'est mélangé dans toutes les directions et le fluide s'est vu entièrement colorié en aval. Il a été postulé qu'il existait un mouvement perpendiculaire superposé au mouvement principal dans la direction axiale. Ce mouvement superposé engendre un échange de quantité de mouvement dans la direction transverse et par conséquent la distribution des vitesses dans cette direction est plus uniforme que dans le cas laminaire (voir Figure 8.2). Cette description permet d'effectuer la décomposition de Reynolds que nous allons expliciter ci-dessous.

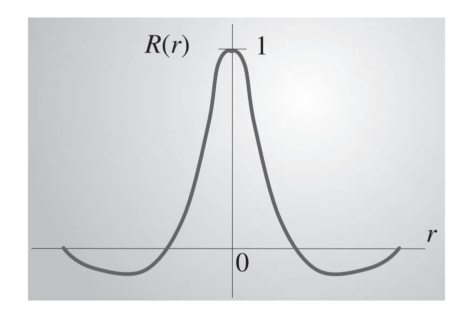


Figure 8.4 – Variation de R(r) en fonction de la distance r.

En général, pour la vitesse eulérienne u_x, il existe deux méthodes de *prise de moyenne* qui conduisent à :

- une moyenne temporelle pour de la turbulence stationnaire :

$$\overline{u_x^t}(x_0) = \frac{1}{T}\int_{t-1/2T}^{t-1/2T} u_x(t')\,\mathrm{d}t'$$

- une moyenne spatiale pour de la turbulence homogène :

$$\overline{u_x^e}(t_0) = \frac{1}{x}\int_{x_0-1/2x}^{x_0+1/2x} u_x(x')\,\mathrm{d}x'$$

Dans le cas d'une turbulence homogène et stationnaire, on peut montrer que les deux moyennes sont identiques et que cette hypothèse est connue sous le nom de *condition d'ergodicité*.

Prenons le cas d'un écoulement à droites parallèles dans un tube par exemple, la vitesse axiale suivant le tube peut être écrite sous la forme suivante :

$$u_x(y,t) = \overline{u_x}(y) + u_x'(\Gamma,\mathrm{t}) \tag{8.2}$$

où Γ peut être n'importe quelle variable de l'espace. La composante moyenne $\overline{u_x}(y)$ donne une information sur la nature de l'écoulement : est-il stationnaire ou instationnaire ? Prenons le cas d'écoulements turbulents de la Figure 8.5a) stationnaire en moyenne et de la Figure 8.5.b) instationnaire et périodique en moyenne. Le temps t_1 correspond à la période de la fluctuation de la vitesse pour les hautes fréquences et t_2 à la période basse fréquence de l'écoulement instationnaire en moyenne ($t_2 >> t_1$). Même si le mouvement est dans la direction axiale, la fluctuation de vitesse *u'* étant aléatoire, elle varie en fait dans toutes les directions. Prenons le cas de l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{8.3}$$

En substituant l'expression (8.2) dans l'équation (8.3), on obtient :

$$\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial x} + \frac{\partial u_x'}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{8.4}$$

Puisque $\partial u_x'/\partial x \neq 0$, l'équation nous dit que les composantes de la vitesse existent même pour cet écoulement parallèle lorsque l'écoulement est turbulent. On peut donc écrire :

$$\begin{cases} u_x(y,t) = \overline{u_x}(y) + u_x'(\Gamma,\mathrm{t}) \\ u_y = 0 + u_y'(\Gamma,\mathrm{t}) \\ u_z = 0 + u_z'(\Gamma,\mathrm{t}) \end{cases} \tag{8.5}$$

Cependant les composantes fluctuantes ne contribuent pas au déplacement de l'élément de fluide. Le déplacement instantané étant $u_x'\,\mathrm{d}t$, on a donc :

$$\int_{-T}^{T} u_x'\,\mathrm{d}t = 0 \text{ pour } t_1 < T \leqslant t_2$$

En revanche, à cause de l'interaction des composantes fluctuantes, le déplacement macroscopique de ces interactions a lieu et est donc non nul sur une longue période et s'exprime par :

$$\int_{-T}^{T} u'_x\, u'_y\, \mathrm{d}t \neq 0$$

En prenant la moyenne temporelle de ces intégrales, on a :

$$\overline{u'_x} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u'_x\, \mathrm{d}t = 0 \qquad (8.6)$$

$$\overline{u'_x\, u'_y} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u'_x\, u'_y\, \mathrm{d}t \neq 0 \qquad (8.7)$$

Plus généralement, si on considère deux paramètres fluctuants (par exemple f' et g') alors : $\overline{f'} = \overline{g'} = 0$, et $\overline{f'g'} \neq 0$. Les moyennes temporelles des gradients spatiaux de ces fluctuations suivent les mêmes lois à savoir :

$$\overline{\frac{\partial f'}{\partial s}} = \overline{\frac{\partial^2 f'}{\partial s^2}} = 0 \qquad (8.8)$$

$$\overline{\frac{\partial (f'g')}{\partial s}} \neq 0 \qquad (8.9)$$

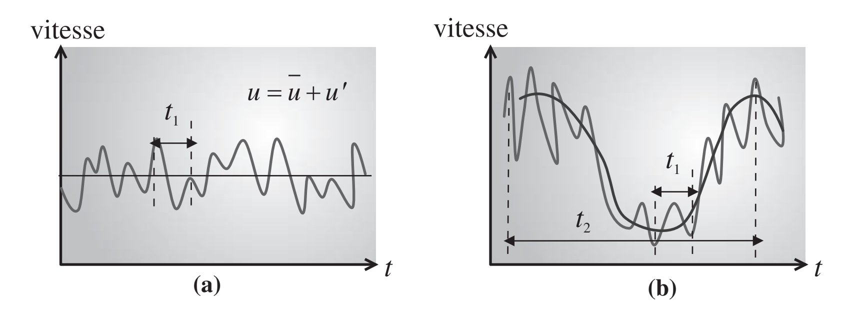


Figure 8.5 – **Champ de vitesse pour un écoulement turbulent : (a) cas stationnaire en moyenne et (b) cas instationnaire et périodique en moyenne.**

L'*intensité de turbulence* ou le degré de turbulence d'un écoulement est défini par la formule suivante :

$$I = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}\left(\overline{u'^2_x} + \overline{u'^2_y} + \overline{u'^2_z}\right)}}{U_\infty} \qquad (8.10)$$

Où U_∞ correspond à la vitesse loin de la paroi (voir Figure 8.3). Une idée pour rendre la turbulence isotrope est de considérer un nid d'abeille qu'on introduit en général à l'amont de la soufflerie par exemple. Dans ce cas, $\overline{u'^2_x} = \overline{u'^2_y} = \overline{u'^2_z}$ et par conséquent :

$I = \sqrt{\overline{u_x'^2}} \big/ U_\infty$. La décomposition de Reynolds permet de séparer un mouvement turbulent en une partie moyenne et une autre fluctuante. On peut donc écrire avec les notations précédentes :

$$u_x = \overline{u_x} + u_x', \quad u_y = \overline{u_y} + u_y', \quad u_z = \overline{u_z} + u_z' \tag{8.11}$$

Par définition, les moyennes temporelles de toutes les quantités décrivant les fluctuations sont nulles: $\overline{u_x'} = 0$, $\overline{u_y'} = 0$, $\overline{u_z'} = 0$ et $\overline{p'} = 0$. Les fluctuations u_x', u_y' et u_z' contribuent à une augmentation de la résistance à la déformation. En d'autres termes, l'effet des fluctuations a tendance à augmenter la viscosité. Si f et g sont deux variables dépendantes et s représentant la variable d'espace (x, y, z ou t) alors :

$$\overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g}\ ;\ \overline{f \cdot g} = \overline{f} \cdot \overline{g} \tag{8.12}$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial s}\ ; \quad \int \overline{f\ \mathrm{d}s} = \int \overline{f}\, \mathrm{d}s \tag{8.13}$$

8.5 Équations pour un écoulement turbulent

Si on considère le cas d'écoulements incompressibles et sans force de volume (gravité), les équations de *Navier-Stokes* en coordonnées cartésiennes peuvent être écrites sous la forme non-conservative suivante (voir Chapitre 5) :

$$\begin{cases} \rho\left[\dfrac{\partial u_x}{\partial t} + \dfrac{\partial (u_x^2)}{\partial x} + \dfrac{\partial (u_x\ u_y)}{\partial y} + \dfrac{\partial (u_x\ u_z)}{\partial z}\right] = -\dfrac{\partial P}{\partial x} + \mu\ \Delta u_x \\ \rho\left[\dfrac{\partial u_y}{\partial t} + \dfrac{\partial (u_x\ u_y)}{\partial x} + \dfrac{\partial (u_y^2)}{\partial y} + \dfrac{\partial (u_y\ u_z)}{\partial z}\right] = -\dfrac{\partial P}{\partial y} + \mu\ \Delta u_y \\ \rho\left[\dfrac{\partial u_z}{\partial t} + \dfrac{\partial (u_x\ u_z)}{\partial x} + \dfrac{\partial (u_y\ u_z)}{\partial y} + \dfrac{\partial (u_z^2)}{\partial z}\right] = -\dfrac{\partial P}{\partial z} + \mu\ \Delta u_z \end{cases} \tag{8.14}$$

et :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{8.15}$$

En reportant (8.11) dans (8.15) et en prenant la moyenne on obtient, d'après (8.6), pour l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial z} = 0 \tag{8.16}$$

Les équations (8.15) et (8.16) entraînent par ailleurs :

$$\frac{\partial u_x'}{\partial x} + \frac{\partial u_y'}{\partial y} + \frac{\partial u_z'}{\partial z} = 0 \tag{8.17}$$

Les composantes de vitesse moyenne et fluctuante vérifient chacune l'équation de continuité. Imaginons un écoulement 2D dans lequel les composantes turbulentes sont indépendantes de z. L'équation donne alors :

$$\frac{\partial u'_x}{\partial x} = -\frac{\partial u'_y}{\partial y} \tag{8.18}$$

La relation nous indique que, s'il y a une augmentation de u'_x dans la direction x, il y aura une augmentation de u'_y dans la direction négative de y. En d'autres termes, $\overline{u'_x u'_y}$ est non-nul et négatif.

On reporte (8.11) dans (8.14) tout en utilisant les relations (8.12)-(8.13) et les postulats suivants : (i) les termes linéaires tels que $\partial u'_x/\partial x$, $\partial u'_y/\partial x\ldots$ s'annulent lorsqu'ils sont moyennés (d'après (8.8)), (ii) il en est de même pour les produits mixtes de type $\overline{u_x} \cdot u'_y$, $\overline{u_x} \cdot u'_z\ldots$ Mais les termes quadratiques restent, tels que $\overline{u'^2_x}$ ou $\overline{u'_x u'_y}$. Par exemple sur l'équation du mouvement en x et en appliquant la moyenne, on obtient :

$$\begin{aligned} &\rho\left[\overline{\frac{\partial \overline{u_x} + u'_x}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial\left(\overline{u_x} + u'_x\right)^2}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial\left(\overline{u_x} + u'_x\right)\left(\overline{u_y} + u'_y\right)}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial\left(\overline{u_x} + u'_x\right)\left(\overline{u_z} + u'_z\right)}{\partial z}}\right] \\ &= -\overline{\frac{\partial\left(\overline{P} + P'\right)}{\partial x}} + \mu\left[\overline{\frac{\partial^2\left(\overline{u_x} + u'_x\right)}{\partial x^2}} + \overline{\frac{\partial^2\left(\overline{u_x} + u'_x\right)}{\partial y^2}} + \overline{\frac{\partial^2\left(\overline{u_x} + u'_x\right)}{\partial z^2}}\right] \end{aligned} \tag{8.19}$$

Ce qui donne finalement :

$$\rho\left[\overline{u_x}\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial x} + \overline{u_y}\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y} + \overline{u_z}\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial z}\right] = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x} + \mu\ \Delta\overline{u_x} - \rho\left[\frac{\partial \overline{u'^2_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'_x u'_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'_x u'_z}}{\partial z}\right] \tag{8.20}$$

Et sur les composantes y et z :

$$\rho\left[\overline{u_x}\frac{\partial \overline{u_y}}{\partial x} + \overline{u_y}\frac{\partial \overline{u_y}}{\partial y} + \overline{u_z}\frac{\partial \overline{u_y}}{\partial z}\right] = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x} + \mu\ \Delta\overline{u_y} - \rho\left[\frac{\partial \overline{u'_u u_y}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'^2_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'_y u'_z}}{\partial z}\right] \tag{8.21}$$

$$\rho\left[\overline{u_x}\frac{\partial \overline{u_z}}{\partial x} + \overline{u_y}\frac{\partial \overline{u_z}}{\partial y} + \overline{u_z}\frac{\partial \overline{u_z}}{\partial z}\right] = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x} + \mu\ \Delta\overline{u_z} - \rho\left[\frac{\partial \overline{u'_u u'_z}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'_y u'_z}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'^2_z}}{\partial z}\right] \tag{8.22}$$

Les équations (8.20)-(8.22) sont similaires aux équations de Navier-Stokes vues au Chapitre 5 sauf que les composantes de vitesse u_x, u_y et u_z sont remplacées par $\overline{u_x}$, $\overline{u_y}$ et $\overline{u_z}$ et que ces équations contiennent des termes additionnels qui dépendent des quantités turbulentes fluctuantes. On peut écrire les équations (8.20)-(8.22) comme :

$$\rho\left[\overline{u_x}\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial x} + \overline{u_y}\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y} + \overline{u_z}\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial z}\right] = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x} + \mu\,\Delta\overline{u_x} - \rho\left[\frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z}\right] \tag{8.23}$$

$$\rho\left[\overline{u_x}\frac{\partial \overline{u_y}}{\partial x} + \overline{u_y}\frac{\partial \overline{u_y}}{\partial y} + \overline{u_z}\frac{\partial \overline{u_y}}{\partial z}\right] = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial y} + \mu\ \Delta\overline{u_y} - \rho\left[\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{zy}}{\partial z}\right] \tag{8.24}$$

$$\rho\left[\overline{u_x}\frac{\partial\overline{u_z}}{\partial x}+\overline{u_y}\frac{\partial\overline{u_z}}{\partial y}+\overline{u_z}\frac{\partial\overline{u_z}}{\partial z}\right]=-\frac{\partial\overline{P}}{\partial z}+\mu\ \Delta\overline{u_z}-\rho\left[\frac{\partial\tau'_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau'_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma'_{zz}}{\partial z}\right] \qquad (8.25)$$

Le tenseur de contrainte turbulent peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix}\sigma'_{xx} & \tau'_{yx} & \tau'_{zx}\\ \tau'_{xy} & \sigma'_{yy} & \tau'_{zy}\\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \sigma'_{zz}\end{bmatrix}=-\rho\begin{bmatrix}\overline{u'^2_x} & \overline{u'_xu'_y} & \overline{u'_x u'_z}\\ \overline{u'_xu'_y} & \overline{u'^2_y} & \overline{u'_yu'_z}\\ \overline{u'_xu'_z} & \overline{u'_yu'_z} & \overline{u'^2_z}\end{bmatrix} \qquad (8.26)$$

Pour un écoulement turbulent, aux contraintes laminaires sont ajoutées des contraintes turbulentes dont le tenseur est donné par (8.26). Ce tenseur est appelé tenseur de contrainte de *Reynolds* ou tenseur de contraintes apparentes. Le tenseur de contrainte total est donné par :

$$\begin{cases}\sigma_{xx}=-P+2\mu\dfrac{\partial\overline{u_x}}{\partial x}-\rho\overline{u'^2_x}\\ \tau_{xy}=\mu\left(\dfrac{\partial\overline{u_x}}{\partial y}+\dfrac{\partial\overline{u_y}}{\partial x}\right)-\rho\overline{u'_xu'_y}\\ \ldots\end{cases} \qquad (8.27)$$

Pour un écoulement pleinement turbulent, les contraintes apparentes sont généralement très grandes devant les composantes visqueuses qui peuvent même être négligées dans de nombreux calculs.

8.6 Équations de couche limite turbulente sur une plaque plane

Pour un écoulement 2D sur une plaque plane, l'épaisseur de couche limite turbulente est supposée être très petite devant la longueur de la plaque. Par une analyse d'ordre de grandeur, on peut montrer que :

(i) $$\frac{\partial\overline{P}}{\partial y}=0\ ;$$

(ii) $$\frac{\partial^2\overline{u_x}}{\partial x^2}\ll\frac{\partial^2\overline{u_x}}{\partial y^2}\ ;$$

(iii) $$\frac{\partial\left(-\rho\overline{u'^2_x}\right)}{\partial x}\ll\frac{\partial\left(-\rho\overline{u'_xu'_y}\right)}{\partial y}.$$

Les équations de couche limite turbulente ainsi que l'équation de continuité peuvent alors s'écrire :

$$\frac{\partial\overline{u_x}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u_y}}{\partial y}=0 \qquad (8.28)$$

$$\overline{u_x}\frac{\partial\overline{u_x}}{\partial x}+\overline{u_y}\frac{\partial\overline{u_x}}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{P}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left[\nu\frac{\partial\overline{u_x}}{\partial y}-\overline{u'_x u'_y}\right] \qquad (8.29)$$

L'équation (8.29) est identique à celle de couche limite laminaire sauf que u_x, u_y et P sont remplacés par $\overline{u_x}, \overline{u_y}$ et $\overline{P}$ et que les efforts visqueux dans le cas laminaire $\partial\tau_{lam}/\partial y$ (où $\tau_{lam} = \mu\partial u_x/\partial y$) est remplacé par $\partial\left(\overline{\tau_{lam}}+\tau_{turb}\right)/\partial y$ où $\overline{\tau_{lam}} = \mu\partial\overline{u_x}/\partial y$ correspond à la contrainte visqueuse laminaire et $\tau_{turb} = -\rho\overline{u'_x u'_y}$ à la contrainte visqueuse turbulente.

Conditions aux limites

Toutes les composantes des contraintes visqueuses apparentes deviennent nulles à la paroi et seules subsistent les contraintes visqueuses de l'écoulement laminaire. Une couche limite très fine existe près de la paroi dans le cas d'un écoulement turbulent et qui se comporte comme dans le cas laminaire. Cette couche est connue sous le nom de *sous-couche visqueuse laminaire* et les vitesses sont telles que les forces visqueuses sont très grandes par rapport aux forces inertielles. Pour un écoulement pleinement turbulent sur une plaque plane proche de la paroi sans gradient de pression suivant x, on peut écrire d'après (8.29) :

$$\nu\frac{\partial^2\overline{u_x}}{\partial y^2}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{u'_x u'_y}\right)=0 \qquad (8.30)$$

Soit après intégration : $\nu\dfrac{\partial\overline{u_x}}{\partial y}-\overline{u'_x u'_y} = C^{te}$

Or, on sait que les composantes turbulentes *fluctuantes* sont nulles à $y = 0$. Donc :

$$\nu\left.\frac{\partial\overline{u_x}}{\partial y}\right|_{y=0}=\frac{\tau_p}{\rho}$$

La contrainte visqueuse τ_p à la paroi peut être estimée par :

$$\tau_p=\mu\left[\frac{U_{SC}-0}{\delta_{SC}-0}\right]=\mu\frac{U_{SC}}{\delta_{SC}} \qquad (8.31)$$

où U_{SC} est la vitesse à la limite de la sous-couche visqueuse. On peut par ailleurs définir une échelle caractéristique de la vitesse comme étant la vitesse de cisaillement :

$$U_\tau=\left[\frac{\tau_p}{\rho}\right]^{1/2} \qquad (8.32)$$

Une fois que U_τ est définie, la structure de la sous-couche visqueuse est alors bien déterminée. Il a été expérimentalement confirmé que les distributions de l'intensité de la turbulence sont proportionnelles à U_τ. Par exemple, la valeur maximale de $\overline{u_x^2}$ est d'ordre $8U_\tau^2$. La relation entre U_τ et U_{SC} peut être déterminée à partir des équations (8.31)-(8.32) : $U_\tau^2 = \nu U_{SC}/\delta_{SC}$. Supposons maintenant que $U_{SC} = CU_\infty$ où C est une constante.

On peut donc écrire que :

$$\frac{\delta_{SC} U_\tau}{\nu} = C\left[\frac{U_\infty}{U_\tau}\right] \tag{8.33}$$

On définit une coordonnée non-dimensionnelle : $y^+ = yU_\tau/\nu$ qui nous permettra d'estimer différentes zones dans un écoulement turbulent. L'épaisseur de la *sous-couche visqueuse laminaire* est en général considérée comme étant à peu près $y^+ \approx 5$. Les effets turbulents démarrent à partir de $y^+ > 5$ et dans la zone $5 < y^+ < 70$, les mouvements laminaires et turbulents coexistent. Cette zone est appelée *zone tampon*. Lorsque $y^+ > 70$, alors l'écoulement est pleinement turbulent.

Pour un écoulement sur une plaque plane, la contrainte visqueuse turbulente $(-\rho\overline{u'_x u'_y})$ est constante tout au long de la direction y et devient égale à τ_p à la paroi. Dans le cas d'un écoulement dans un canal, cette contrainte varie suivant y et il est possible d'écrire : $\tau_{turb}/\tau_p = (h - y)/h$ où le canal a une hauteur *2h* et (*h-y*) est la distance mesurée à partir du centre du canal. La figure 8.6 montre les différentes variations des contraintes turbulentes.

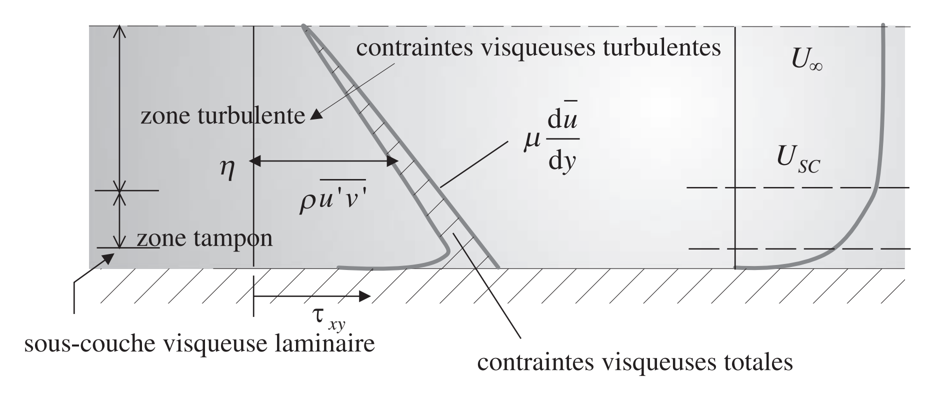


Figure 8.6 – Différentes zones pour un écoulement turbulent sur une plaque plane.

8.7 Modèles de contrainte de cisaillement

Par analogie avec le coefficient de viscosité pour un écoulement laminaire, *Boussinesq* a introduit un *coefficient de mélange* μ_t pour le tenseur de *Reynolds* : $\tau_{turb} = -\rho\overline{u'_x u'_y} = \mu_t \partial\overline{u_x}/\partial y$. L'équation peut donc être écrite sous la forme suivante :

$$\overline{u_x}\frac{\partial\overline{u_x}}{\partial x} + \overline{u_y}\frac{\partial\overline{u_x}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{P}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu + \nu_t)\frac{\partial\overline{u_x}}{\partial y}\right] \tag{8.34}$$

ν_t est appelée *viscosité turbulente* qui est inconnue à ce stade ; elle est attribuée aux fluctuations aléatoires et ne correspond donc pas à une propriété du fluide comme l'est la viscosité cinématique ν dans le cas laminaire. Il faut donc chercher des relations empiriques entre ν_t et la vitesse moyenne. Pour cela, considérons une couche limite pleinement

turbulente (voir Figure 8.7). L'écoulement moyen est parallèle à l'axe x. Les moyennes temporelles des composantes de vitesse sont données par : $\overline{u_x} = \overline{u_x}(y)$, $\overline{u_y} = 0$ et $\overline{u_z} = 0$.

Les composantes fluctuantes de la vitesse transversale u'_y transportent de la masse et du mouvement à travers un plan à la distance y_1 de la paroi. La contrainte de cisaillement turbulent due à cette fluctuation est donnée par :

$$\tau_{turb} = -\rho\overline{u'_x u'_y} = \mu_t \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y} \tag{8.35}$$

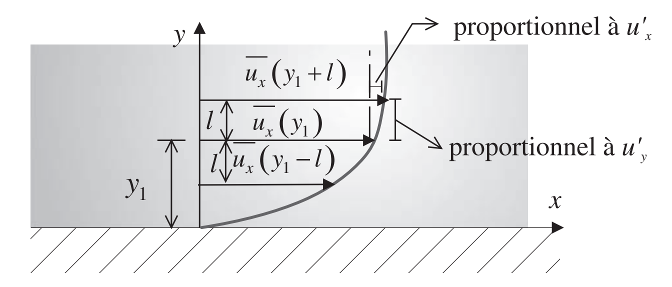


Figure 8.7 – **Hypothèse de la longueur de mélange de Prandtl.**

Une masse de fluide qui arrive vers la couche y_1 à partir de la couche $(y_1 - l)$ a une valeur positive de u'_y. La différence de vitesse entre les deux niveaux peut être exprimée à partir du développement de *Taylor* au 1[er] ordre :

$$\Delta u_1 = \overline{u_x}(y_1) - \overline{u_x}(y_1 - l) \approx l\left(\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y}\right)_{y_1} \tag{8.36}$$

La longueur l qui est très petite est connue sous le nom de *longueur de mélange de Prandtl* qui a proposé que le déplacement transverse d'une particule fluide quelconque correspond en moyenne à « l ». Prenons le cas d'une autre masse de fluide avec une valeur négative de u'_y, celle-ci provenant de $(y_1 + l)$ jusqu'à y_1. La différence de vitesse est donnée par :

$$\Delta u_2 = \overline{u_x}(y_1 + l) - \overline{u_x}(y_1) \approx l\left(\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y}\right)_{y_1} \tag{8.37}$$

La moyenne temporelle de la valeur absolue de cette fluctuation est donnée par :

$$\overline{|u'_x|} = \frac{1}{2}(|\Delta u_1| + |\Delta u_2|) = l\left|\left(\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y}\right)_{y_1}\right| \tag{8.38}$$

On peut postuler que les déplacements élémentaires de fluide autour de y_1 vont entraîner la relation suivante : $\overline{|u'_y|} \cong \overline{|u'_x|}$ et donc :

$$\overline{|u'_y|} = C^{te}\,\overline{|u'_x|} = C^{te}\, l\left|\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y}\right|$$

Sachant que, lorsque u'_x est positif, u'_y sera négatif d'après l'équation de continuité et inversement lorsque u'_x est négatif, u'_y sera positif. Par conséquent :

$$\overline{u'_x u'_y} = -C_1 \overline{|u'_x|} \overline{|u'_y|} = -C_2 l^2 \left(\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y} \right)^2 \quad (8.39)$$

La constante C_2 peut être introduite dans la longueur de mélange et on peut donc écrire la contrainte visqueuse turbulente comme :

$$\tau_{turb} = -\rho \overline{u'_x u'_y} = \rho\, l^2 \left(\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y} \right)^2 \quad (8.40)$$

La relation (8.40) peut aussi être écrite sous la forme :

$$\tau_{turb} = \rho l^2 \left| \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y} \right| \left(\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y} \right) = \mu_t \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y} \quad (8.41)$$

La *viscosité apparente* peut donc être exprimée par :

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y} \right| \quad (8.42)$$

Cependant, le problème n'est toujours pas résolu. Comment déterminer la valeur de la longueur de mélange « l » ? Plusieurs lois de corrélation (utilisant les résultats expérimentaux pour τ_{turb}) ont été proposées pour déterminer l. Dans le cas d'un régime de turbulence isotrope, on utilise : $l = \chi y$ où y est la distance à partir du mur et χ est la *constante de von Karman* ($\approx 0{,}4$).

8.8 Distribution de vitesse et coefficient de frottement pour les écoulements dans des tubes à grand nombre de Reynolds

Pour des écoulements dans un canal rectangulaire à très grand nombre de Reynolds, la sous-couche visqueuse laminaire peut être pratiquement ignorée. Le canal est de hauteur $2h$ et l'axe x est placé le long du mur inférieur du canal. La vitesse suivant x ne dépend que de y ($u_x(y)$). Près de la paroi, on peut appliquer la relation de la longueur de mélange trouvée précédemment : $l = \chi y$. En suivant l'hypothèse de *Prandtl*, la contrainte visqueuse turbulente peut s'écrire :

$$\tau_{turb} = \rho\, \chi^2 y^2 \left(\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y} \right) \quad (8.43)$$

Prandtl introduisit une hypothèse supplémentaire qui stipule que la contrainte visqueuse turbulente reste constante comme dans le cas d'un écoulement de Couette,

c'est-à-dire que $\tau_{turb} = \tau_p$ où τ_p est la contrainte visqueuse sur la paroi. En considérant la vitesse de cisaillement (8.32), on obtient :

$$U_\tau = \chi^2 y^2 \left(\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y}\right)^2 \tag{8.44}$$

D'où : $\partial u_x / \partial y = U_\tau / \chi y$. En intégrant cette dernière équation, on trouve finalement :

$$\overline{u_x} = \frac{U_\tau}{\chi} \ln y + C \tag{8.45}$$

Malgré le fait que l'équation a été obtenue au voisinage de la paroi et que $\tau_{turb} = \tau_p$, on peut donc l'utiliser dans tout le domaine. À une distance $y = h$ (correspondant au milieu du canal), $\overline{u_x} = U_{max}$. La solution finale est donc :

$$\frac{U_{max} - \overline{u_x}}{u_{mur}} = \frac{1}{\chi} \ln\left(\frac{h}{y}\right) \tag{8.46}$$

En fait, U_r représente la vitesse de référence. On a d'après (8.45) :

$$\frac{\overline{u_x}}{U_\tau} = \frac{1}{\chi} \ln y + C \tag{8.47}$$

On s'aperçoit que la condition de non-glissement à la paroi n'est pas satisfaite mais peut être remplacée par ($\overline{u_x} = 0$ à $y = y_0$ de la paroi) et par conséquent :

$$\frac{\overline{u_x}}{U_\tau} = \frac{1}{\chi}(\ln y - \ln y_0) \tag{8.48}$$

La distance y_0 est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite visqueuse. On peut encore écrire (8.48) sous la forme suivante :

$$\frac{\overline{u_x}}{U_\tau} = \frac{1}{\chi}\left(\ln y \frac{U_\tau}{\nu} - \ln \beta\right) \tag{8.49}$$

Ou alors :

$$\frac{\overline{u_x}}{U_\tau} = A_1 \ln y^+ + D_1 \tag{8.50}$$

avec $A_1 = 1 / \chi$ et β est inclus dans D_1.

L'équation (8.50) est généralement connue sous le nom de profil de vitesse universel à cause du fait qu'elle est applicable pour des nombres de *Reynolds* modérés à des nombres de *Reynolds* très grands. Cependant les constantes A_1 et D_1 doivent être trouvées à partir des expériences. Ce profil de vitesse est valable aussi bien pour des canaux rectangulaires que circulaires. Les expériences effectuées par *Nikuradse* et *Reichardt*, donnent pour un tube lisse l'équation suivante :

$$\frac{\overline{u_x}}{U_\tau} = 2,5 \ln y^+ + 5,5 \tag{8.51}$$

Cette distribution de vitesse est montrée sur la courbe (b) de la figure 8.8. Le coefficient de frottement C_f correspondant s'écrit comme :

$$\frac{1}{\sqrt{C_f}} = 2{,}0 \log_{10}\left(Re \sqrt{C_f}\right) - 0{,}8 \tag{8.52}$$

Comme mentionné précédemment, le profil de vitesse universel ne satisfait pas la condition de non-glissement près de la paroi où la contrainte visqueuse prédomine. Cependant, *von Karman* a suggéré une modification du profil de vitesse pour la sous-couche laminaire et la zone tampon définies de la façon suivante :

$$\frac{\overline{u_x}}{U_\tau} = y^+ = \frac{y\,U_\tau}{\nu} \text{ pour } y^+ < 5{,}0 \tag{8.53}$$

$$\frac{\overline{u_x}}{U_\tau} = 11{,}5 \log_{10}\left(y^+\right) - 3{,}0 \text{ pour } 5{,}0 < y^+ < 60 \tag{8.54}$$

La courbe (a) de la figure 8.8 montre le profil des équations (8.53)-(8.54).

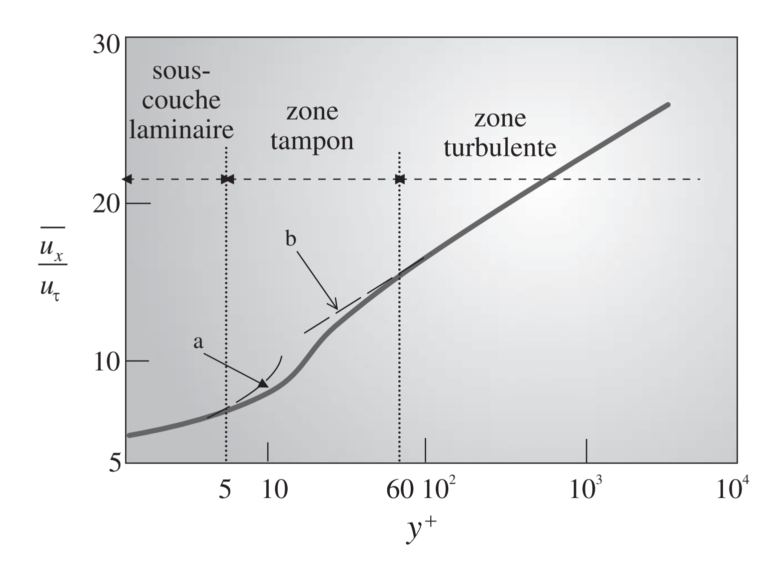


Figure 8.8 – **Distribution de vitesse universelle pour des tubes lisses.**

Les trois zones (sous-couche laminaire, zone tampon et zone complètement turbulente) sont illustrées sur la figure 8.8.

La surface est dite *hydrauliquement lisse* tant que $0 \leqslant \varepsilon_p U_\tau/\nu \leqslant 5$ où ε_p est la hauteur moyenne des rugosités à l'intérieur du tube. Dans ce cas, les rugosités du tube lisse ne peuvent aller au-delà de la sous-couche visqueuse laminaire. Si ces rugosités excèdent cette épaisseur, une résistance de frottement supplémentaire (justifiée à travers des vérifications expérimentales) contribuera à la friction du tube due à une traînée de forme entraînée par les rugosités dans la couche limite.

Par conséquent, dans le cas des tubes rugueux, les expériences indiquent que le profil de vitesse peut être exprimé par :

$$\frac{\overline{u_x}}{U_\tau} = 2{,}5\,\frac{y}{\varepsilon_p} + 8{,}5 \tag{8.55}$$

On remarque que la viscosité n'apparaît plus dans l'équation (8.55) dans le cas des tubes rugueux, ce qui veut dire que, pour une zone complètement rugueuse d'un écoulement turbulent, le profil est indépendant du nombre de *Reynolds* et est en revanche une fonction de la rugosité. Les différentes lois en fonction du nombre de Reynolds et de la nature de la surface du tube sont détaillées dans le Chapitre 9.

Exercices

8.1 Écoulement autour d'un train

Un train profilé fait L = 85 m de longueur, h = 2,6 m de hauteur et l = 2,4 m de largeur. Calculer la puissance requise pour vaincre la traînée due aux effets visqueux lorsque le train va à U = 145 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ dans les conditions atmosphériques standard en supposant que la traînée sur les côtés et en haut sont égales à celle sur une plaque plane de largeur b = 7,6m et de longueur L. On donne l'expression du coefficient de traînée pour ce train profilé dans le cas des nombres de *Reynolds* très grands : $Re > 10^7$, $C_D = 0{,}455/\log_{10}(Re)^{2{,}58}$. On prendra $\rho = 1{,}2\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et $\nu = 1{,}46\times10^{-5}\,\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$.

8.2 Couche limite sur une paroi

Le très célèbre scientifique *Theodore von Karman* a suggéré que la longueur de mélange variait comme :

$$l = \chi\left|\frac{\dfrac{\mathrm{d}\overline{u_x}}{\mathrm{d}y}}{\dfrac{\mathrm{d}^2\overline{u_x}}{\mathrm{d}y^2}}\right|$$

En utilisant cette relation, déterminer le profil de vitesse près d'une paroi d'un écoulement de couche limite sur une plaque plane.

8.3 Couche limite turbulente

Lors d'un écoulement sur une plaque plane, la couche limite laminaire subit une transition en une couche limite turbulente lorsque cet écoulement va de l'amont à l'aval de la plaque plane. On observe que le profil initialement parabolique dans le cas laminaire change en un profil en loi de puissance 1/7e dans le régime turbulent. Trouver l'épaisseur de la couche limite turbulente si le flux de quantité de mouvement dans la couche limite reste constant.

Solutions

8.1 On peut calculer le nombre de Reynolds basé sur la longueur L par :

$$Re = \frac{DV}{\nu} = \frac{85\left(\dfrac{145 \times 10^3}{3\,600}\right)}{1,46 \times 10^{-5}} = 2,34 \times 10^8 > 5 \times 10^5$$

L'écoulement est donc turbulent. Comme le nombre de *Reynolds* est très grand, on peut appliquer la formule donnée dans l'énoncé pour trouver le coefficient de traînée :

$$C_D = \frac{0,455}{\log(Re)^{2,58}}$$

On trouve $C_D = 0,0018$ et donc :

$$T_f = f\rho(V^2/2)bL = 0,0018 \times 1,2 \times \frac{1}{2}\left(\frac{145 \times 10^3}{3\,600}\right)^2 \times 7,6 \times 85 = 1131,8 \text{ N}$$

D'où la puissance pour vaincre cette traînée :

$$P = T_f \times V = 1\,131,8 \times \frac{145 \times 10^3}{3\,600} = 45,6 \text{ kW}$$

8.2 On sait que $\tau_{turb} = \mu_t \dfrac{\partial \overline{u_x}}{\partial y}$ où $\mu_t = \rho l^2 \left|\dfrac{\partial \overline{u_x}}{\partial y}\right|$

Et donc $\tau_{turb} = \rho l^2 \left|\dfrac{\partial \overline{u_x}}{\partial y}\right|^2$. En substituant la suggestion de von Karman, on obtient :

$$\tau_{turb} = \frac{\rho\chi^2\left(\dfrac{d\overline{u_x}}{dy}\right)^2\left(\dfrac{d\overline{u_x}}{dy}\right)^2}{\left(\dfrac{d^2\overline{u_x}}{dy^2}\right)^2} = \frac{\rho\chi^2\left(\dfrac{d\overline{u_x}}{dy}\right)^4}{\left(\dfrac{d^2\overline{u_x}}{dy^2}\right)^2}$$

Donc : $\left(\dfrac{d\overline{u_x}}{dy}\right)^4 = \dfrac{\tau_{turb}}{\rho}\dfrac{1}{\chi^2}\left(\dfrac{d^2\overline{u_x}}{dy^2}\right)^2$

En supposant que $\tau_{turb} = \tau_p$ et en considérant $U_\tau = \sqrt{\tau_p/\rho}$, on obtient alors :

$$\left(\frac{d\overline{u_x}}{dy}\right)^4 = \frac{U_\tau^2}{\chi^2}\left(\frac{d^2\overline{u_x}}{dy^2}\right)^2$$

En prenant la racine carrée de l'expression précédente, on obtient alors :

$$\left(\frac{d\overline{u_x}}{dy}\right)^2 = \mp\frac{U_\tau}{\chi}\left(\frac{d^2\overline{u_x}}{dy^2}\right)$$

On pose : $m = \frac{d\overline{u_x}}{dy}$ et donc $\frac{dm}{dy} = \mp\frac{\chi}{u_\tau}m^2$

Soit en intégrant : $-\frac{1}{m} = \mp\frac{\chi}{U_\tau}y + C_1$

Or lorsque $y \to 0$, $m \to \infty$ et donc $C_1 = 0$

Alors $\frac{d\overline{u_x}}{dy} = \frac{U_\tau}{\chi y}$ puisque $\frac{d\overline{u_x}}{dy} \geqslant 0$

En intégrant l'équation précédente on obtient :

$$\overline{u_x} = \frac{U_\tau}{\chi}\ln y + C_2$$

À une distance $y = y_0$ on a $\overline{u_x} = 0$ et donc $C_2 = -\frac{U_\tau}{\chi}\ln y_0$

D'où finalement : $\frac{\overline{u_x}}{U_\tau} = \frac{1}{\chi}\ln(y - y_0)$

Admettons $y_0 = \beta\frac{\nu}{U_\tau}$ correspondant à l'ordre de grandeur de la sous-couche visqueuse

et β étant une constante arbitraire. On obtient donc :

$$\frac{\overline{u_x}}{U_\tau} = \frac{1}{\chi}\left(\ln\frac{U_\tau y}{\nu} - \ln\beta\right)$$

Cette dernière relation correspond à la loi universelle du profil de vitesse.

8.3 Supposons que a est la largeur de la couche limite. Le flux de quantité de mouvement A est :

$$A = \int \rho u_x u_x a\,dy = \rho U_\infty^2 a\delta\int\left(\frac{u_x}{U_\infty}\right)^2 d\eta$$

Où : $\eta = y / \delta$.

Pour un profil en loi de puissance 1/7e :

$$\frac{\overline{u_x}}{U_\infty} = \eta^{1/7}$$

D'où : $A_{turb} = \rho U_\infty^2 a\delta_{turb}\int_0^1(\eta^{1/7})^2\,d\eta = \rho U_\infty^2 a\delta_{turb}\left[\frac{7}{9}\eta^{9/7}\right]_0^1 = \frac{7}{9}\rho U_\infty^2 a\delta_{turb}$

Et donc $\delta_{turb} = \frac{9}{7}\frac{A_{turb}}{\rho U_\infty^2 a}$

Remarque : en général, la couche limite turbulente croît plus rapidement que la couche laminaire lorsqu'un écoulement complètement turbulent est considéré à partir du bord d'attaque. Le résultat trouvé ici est valable dans la zone de transition pour un flux de quantité de mouvement constant.

Bibliographie

COUSTEIX J., *Turbulence et couche limite*, CEPADUES, Paris, 1989.

CHASSAING P., *Turbulence en mécanique des fluides*, CEPADUES, 2000.

LESIEUR M., *La turbulence*, Presses Universitaires de Grenoble, Grenoble, 1994.

SCHLICHTING H., *Boundary-Layer theory*, McGRAW-Hill, 1979.

SOM S. K., BISWAS G., *Introduction to Fluid Mechanics and Fluid Machines*, Tata McGRAW-HILL Publishing Company Limited, New-Delhi, 2004.

9 Théorème de Bernoulli généralisé

PLAN

OBJECTIFS

- Généraliser le théorème de Bernoulli aux écoulements de fluides visqueux.
- Définir le coefficient de perte de charge.
- Donner des formulations appropriées pour les pertes de charges régulières et singulières.

9.1 Utilisation du théorème de Bernoulli avec les fluides réels

Nous avons montré, au chapitre 4, l'intérêt du théorème de Bernoulli pour calculer la vitesse et la pression en tout point d'une ligne de courant d'un fluide parfait en écoulement incompressible. Ainsi, considérons par exemple le circuit hydraulique représenté sur la Figure 9.1. Le fluide est considéré comme parfait et l'écoulement incompressible et permanent. On suppose qu'une pompe est placée sur ce circuit afin d'assurer la mise en circulation du fluide. Nous pouvons écrire que la variation d'énergie entre les points 1 et 2 de la ligne de courant est :

$$\left(\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}+g\,z\right)_1=\left(\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}+g\,z\right)_2-H_p \tag{9.1}$$

Dans cette relation H_p désigne l'énergie, exprimée en hauteur de fluide, apportée par la pompe au fluide.

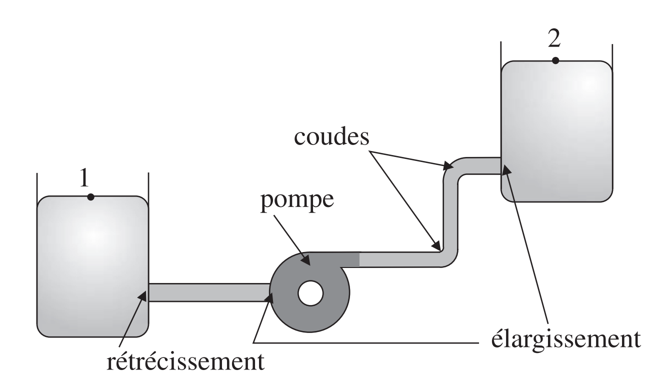


Figure 9.1 – **Pompe assurant la circulation d'un fluide entre deux réservoirs.**

Une particularité intéressante de l'analyse de réseaux hydrauliques au travers de la variation de hauteur d'eau est de pouvoir tracer la *ligne de charge* et donc de vérifier que sa hauteur reste cohérente avec les choix de puissance des organes de mise en mouvement du fluide.

Comme nous l'avons vu au chapitre 4, l'écoulement de fluides réels, donc visqueux, dans des conduites s'accompagne d'une dissipation visqueuse qui induit des pertes de charge. Ces pertes de charge se classent dans 2 sous-ensembles : pertes de charge *régulières* et *singulières*. Le premier sous-ensemble ne traite que de l'effet de la viscosité du fluide dans une conduite de section constante. Le deuxième sous-ensemble prend en compte des modifications de section de l'écoulement (élargissement ou rétrécissement), des changements de directions (coudes, bifurcations) ou bien encore des modifications de sections induites par la pression de *dispositifs hydrauliques* (pompe, turbine, vanne, …). Dans un réseau hydraulique réel, il est nécessaire d'intégrer ces pertes de charge dans le tracé de la ligne de charge.

Les équations de *Navier-Stokes* (lorsque le fluide suit un comportement newtonien) peuvent être utilisées pour déterminer ces pertes de charge en fonction de la géométrie de l'écoulement et des propriétés thermophysiques du fluide. Néanmoins, la complexité des dispositifs utilisés ne permet pas d'obtenir de solutions simples et facilement utilisables par l'ingénieur. D'autre part, les calculs deviennent complexes lorsque l'écoulement est turbulent. Une solution consiste alors à utiliser des corrélations empiriques ou semi-empiriques conduisant à des solutions approximatives mais acceptables.

Toute la méthodologie développée dans ce chapitre repose sur l'hypothèse forte qui est celle de l'écoulement unidirectionnel.

9.2 Conséquence de l'hypothèse d'écoulement unidirectionnel

Le profil de vitesse d'un fluide parfait dans une conduite est uniforme étant donné que le fluide est dénué de viscosité et que donc il « glisse » sur les parois de la conduite. Dans ce cas, il est possible de considérer n'importe quelle ligne de courant partant du

point 1 et arrivant au point 2 sur la section de la conduite pour arriver au même résultat de ligne de charge définie au chapitre 4. Lorsque le fluide est visqueux cela n'est plus vrai puisque nous avons vu au chapitre 4 que l'adhérence du fluide sur les parois de la conduite entraîne un cisaillement des lignes de courant et donc un profil de vitesse non uniforme sur la section. Néanmoins, l'écoulement est globalement unidirectionnel et donc le but est de définir une ligne de courant « moyenne » pour joindre les points d'entrée et de sortie de la conduite.

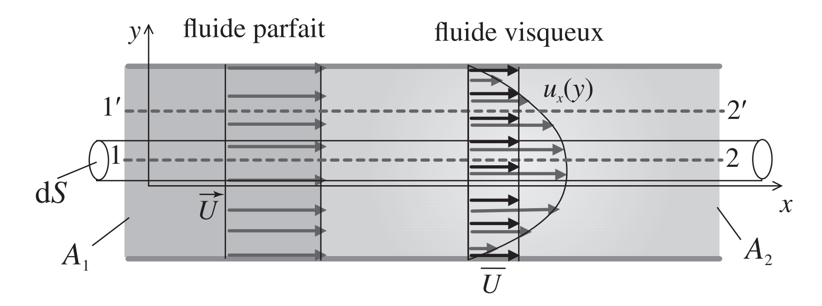


Figure 9.2 – Écoulement dans une conduite (fluide parfait/fluide visqueux).
Dans le cas du fluide visqueux, l'énergie d'une particule fluide sur la ligne de courant 1-2 est différente de celle pour la particule se déplaçant sur la ligne de courant 1′-2′. Pour l'écoulement dans une conduite, il faut donc raisonner sur les grandeurs moyennes d'altitude, de pression et de vitesse.

Considérons l'écoulement stationnaire et incompressible dans la conduite représentée sur la Figure 9.2. Soit e_f la quantité qui représente l'énergie dissipée par unité de masse par les forces visqueuses. On définit la quantité :

$$h_f = \frac{e_f}{g} \tag{9.2}$$

C'est la perte de charge de la conduite en termes de hauteur. On distingue les pertes de charges régulières h_r résultant de la *dissipation visqueuse* dans une conduite droite, des pertes de charge singulières h_s provenant des *modifications de géométrie* d'écoulement, et donc $h_f = h_r + h_s$. Dans un premier temps, nous ne prenons pas en compte la perte de charge et nous multiplions chaque membre de la relation (9.1) par le débit dans un tube de courant de section dS à l'intérieur de la conduite (on a aussi $H_p = 0$). Nous intégrons la relation obtenue sur les sections d'entrée et de sortie de la conduite :

$$\iint_{A_1} \left(\frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1 \right) \rho \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{N_1} \, \mathrm{d}S = \iint_{A_2} \left(\frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2 \right) \rho \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{N_2} \, \mathrm{d}S \tag{9.3}$$

Le débit dans la conduite est conservatif donc :

$$\iint_{A_1} \rho \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{N_1} \, \mathrm{d}S = \iint_{A_2} \rho \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{N_2} \, \mathrm{d}S \tag{9.4}$$

En divisant membre à membre la relation (9.3) par la relation (9.4) on obtient la relation de Bernoulli entre les points 1 et 2, quelque soit leur position sur les sections A_1 et A_2 sur la Figure 9.2 sous la forme suivante :

$$\left(\frac{\overline{U^2}}{2g}+\frac{\overline{p}}{\rho g}+\overline{z}\right)_1-\left(\frac{\overline{U^2}}{2g}+\frac{\overline{p}}{\rho g}+\overline{z}\right)_2=0 \tag{9.5}$$

Nous notons $\overline{U^2}$, $\overline{p}$ et $\overline{z}$ les moyennes du carré de la vitesse, de la pression et de la hauteur respectivement avec :

$$\begin{aligned}\overline{U^2}&=\iint_A \rho u^2\vec{u}\cdot\overrightarrow{N}\,\mathrm{d}S\Big/\iint_A \rho\vec{u}\cdot\overrightarrow{N}\,\mathrm{d}S\\ \overline{p}&=\iint_A \rho p\vec{u}\cdot\overrightarrow{N}\,\mathrm{d}S\Big/\iint_A \rho\vec{u}\cdot\overrightarrow{N}\,\mathrm{d}S\\ \overline{z}&=\iint_A \rho z\vec{u}\cdot\overrightarrow{N}\,\mathrm{d}S\Big/\iint_A \rho\vec{u}\cdot\overrightarrow{N}\,\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{9.6}$$

En prenant maintenant en compte les pertes de charge et en supposant que la conduite est équipée de machines réceptrices (turbine, signe + dans la relation (9.7)) et/ou génératrices (pompe, signe - dans la relation (9.7)) mettant en jeu un travail spécifique w_i alors la relation (9.5) devient :

$$\left(\frac{\overline{U^2}}{2g}+\frac{\overline{p}}{\rho g}+\overline{z}\right)_1-\left(\frac{\overline{U^2}}{2g}+\frac{\overline{p}}{\rho g}+\overline{z}\right)_2=\sum_i \pm\frac{w_i}{g}\pm h_r\pm h_s \tag{9.7}$$

Toute la difficulté dans l'application du théorème de Bernoulli généralisé réside dans l'obtention des pertes de charge régulières h_r et singulières h_s en fonction de la géométrie de la conduite, du type d'écoulement (laminaire ou turbulent), de la nature du fluide et de l'état de surface de la paroi solide.

9.3 Écoulement d'un fluide à l'entrée d'une conduite

Afin de bien comprendre la différence entre pertes de charges régulières et singulières, examinons le profil de vitesse d'un fluide à l'entrée d'une conduite de diamètre D comme cela est représenté sur la Figure 9.3. Le fluide est fortement cisaillé au voisinage de la paroi alors qu'il est accéléré sur l'axe de la conduite où le *frottement* a moins d'effet sur l'écoulement. On constate qu'au début de la conduite, la couche-limite de fluide se développe et son épaisseur augmente au fur et à mesure jusqu'à complètement envahir la section de l'écoulement à la distance L_e (*longueur d'entrée*) où l'écoulement est dit pleinement développé. On trouve alors des relations semi-empiriques liant cette distance au nombre de *Reynolds* de l'écoulement. Dans le régime laminaire ($Re<2000$), cette relation est :

$$\frac{L_e}{D}\sim 0{,}065\,Re \tag{9.8}$$

Dans le cas où l'écoulement est turbulent (Re>2000), cette distance est donnée par :

$$\frac{L_e}{D} \sim 4{,}4\ Re^{1/6} \tag{9.9}$$

Il apparaît que le gradient de pression au niveau de l'entrée de la conduite est plus grand que celui de l'écoulement développé. C'est dans la zone d'entrée que l'on distingue donc les pertes de charge singulières (rétrécissement dans le cas de la Figure 9.3). Une fois l'écoulement pleinement développé, on retrouve une décroissance linéaire de la pression avec la distance dans la conduite. C'est bien la solution que nous avons obtenue pour la résolution des équations de *Navier-Stokes* dans un tube cylindrique (voir exercice 4 du chapitre 5). Dans ce cas cette perte de charge est associée à une perte de charge régulière. La terminologie prend tout son sens au travers de cet exemple (« singulière » pour dire que la chute de pression est localisée en un point, « régulière » pour dire que cette chute de pression a lieu sur une certaine longueur de l'écoulement).

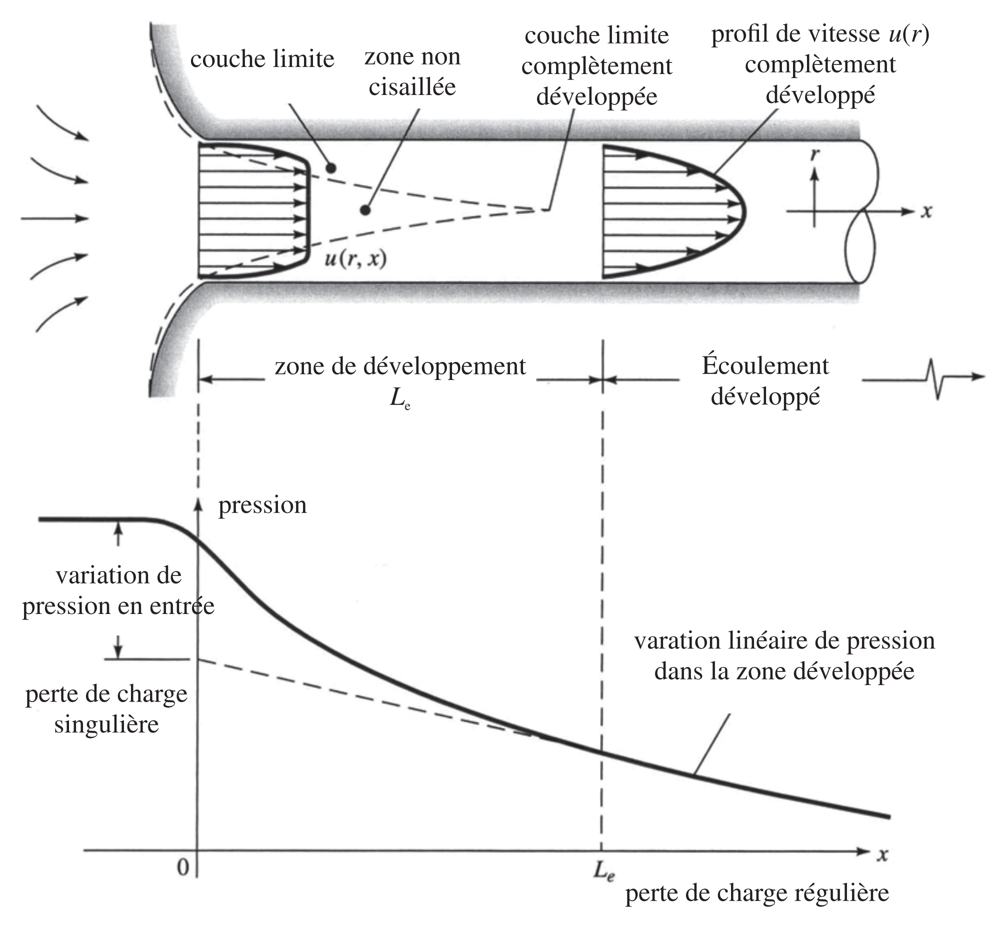


Figure 9.3 – Explication phénoménologique de la différence entre perte de charge singulière (chute de pression instantanée due au rétrécissement) et perte de charge régulière (variation monotone de la pression le long de l'écoulement due à la viscosité du fluide et à l'état de surface de la conduite).

9.4 Pertes de charge régulières

9.4.1 Coefficient de frottement

On définit le coefficient sans dimension, appelé coefficient de *Darcy-Weisbach* ou coefficient de perte de charge régulière, pour l'écoulement dans un conduit droit, de longueur L et de diamètre D, par :

$$\Lambda = \frac{\Delta p}{\frac{L}{D}\frac{1}{2}\rho U^2} \tag{9.10}$$

U est la vitesse débitante (égale au rapport entre débit volume et section du conduit) et Δp est la chute de pression due à la seule contribution du frottement.

Dans l'industrie, on utilise souvent le coefficient de frottement de Fanning. Ce coefficient est différent du celui de Darcy-Weisbach par un facteur de 4. En effet, le coefficient de frottement relie la contrainte de cisaillement τ_p à la paroi à la vitesse débitante U sous la forme :

$$\tau_p = C_f \frac{\rho U^2}{2}$$

Or d'après l'exercice 5.3 du chapitre 5 :

$$\tau_p = \frac{\Delta p}{L}\frac{D}{4}$$

On a alors :

$$\frac{\Delta p}{L}\frac{D}{4} = C_f \frac{\rho U^2}{2}$$

Soit :

$$C_f = \frac{\Delta p}{4\frac{L}{D}\frac{\rho U^2}{2}}$$

Et finalement :

$$C_f = \frac{1}{4}\frac{\Delta p}{\frac{L}{D}\frac{\rho U^2}{2}} = \frac{\Lambda}{4}$$

La relation (9.10) conduit donc à exprimer la chute de pression sous la forme :

$$\Delta p = \Lambda \frac{L}{D}\frac{1}{2}\rho U^2 \tag{9.11}$$

Si l'on cherche à rapprocher cette perte de charge à une hauteur de liquide, la relation de l'hydrostatique $\Delta p = \rho g h_r$ nous permet d'obtenir :

$$h_r = \Lambda \frac{L}{D} \frac{1}{2g} U^2 \tag{9.12}$$

On a donc une expression de la perte de charge en hauteur d'eau utilisable dans la relation (9.7).

Le coefficient de perte de charge régulière peut aussi s'exprimer en fonction de la contrainte de cisaillement τ_p à la paroi sous la forme :

$$\Lambda = \frac{4\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U^2} \tag{9.13}$$

9.4.2 Coefficient de frottement en régime laminaire

Nous avons étudié l'écoulement de *Poiseuille* dans un tube au chapitre 5, et nous avons montré que la perte de charge (différence de pression) est donnée par :

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{8\mu U}{R^2} \tag{9.14}$$

En substituant cette expression dans la relation (9.10), on obtient l'expression du coefficient de perte de charge régulière :

$$\Lambda = \frac{8\mu U}{R^2} \frac{1}{\frac{\rho U^2}{2D}} = \frac{64}{\frac{\rho U D}{\mu}} \tag{9.15}$$

On reconnaît dans cette expression le nombre de *Reynolds* $Re = \rho U D/\mu$ où D est le diamètre de la conduite, U la vitesse débitante, ρ la masse volumique et μ la viscosité dynamique. Le coefficient de perte de charge régulière Λ pour l'écoulement laminaire d'un fluide dans une conduite est indépendant de la *rugosité* de la paroi et sa valeur est donnée par la relation :

$$\Lambda = \frac{64}{Re} \tag{9.16}$$

9.4.3 Coefficient de perte de charge régulière en régime turbulent

En écoulement turbulent, la rugosité de paroi joue un rôle déterminant sur la valeur du coefficient de perte de charge régulière. En effet, le niveau de turbulence sera directement associé à l'état de surface de la paroi solide. On définit la rugosité relative de la paroi par (ε/D). Dans cette relation, ε est la *rugosité absolue* dépendant de la hauteur moyenne des rugosités ainsi que de leur forme, de leur nombre et de leur répartition surfacique. On qualifie de *lisse*, une paroi où la valeur de ε est inférieure ou égale à la hauteur δ de la couche limite laminaire de l'écoulement. Dans le cas contraire, la paroi sera qualifiée

de *rugueuse*. Dans ce cas le coefficient de perte de charge régulière est déterminé à partir de corrélations phénoménologiques du type de la relation de *Colebrook* et *White* valable pour $Re>5\times10^5$ (voir Tableau 9.1 pour plus de détails) :

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = -2\log_{10}\left(\frac{\varepsilon / D}{3,71} + \frac{2,51}{Re\sqrt{\Lambda}}\right) \tag{9.17}$$

Cette équation peut être résolue numériquement avec la méthode itérative :

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda^{(k+1)}}} = -2\log_{10}\left(\frac{\varepsilon / D}{3,71} + \frac{2,51}{Re\sqrt{\Lambda^{(k)}}}\right)$$

On arrête les calculs lorsque $|\Lambda^{(k+1)} - \Lambda^{(k)}| < \gamma$, où γ correspond au petit paramètre du critère d'arrêt.

Nikuradse mena des expériences en contrôlant la rugosité de paroi de conduites. Pour cela, il colla sur la paroi des grains de sable de taille calibrée grâce à un tamis. La rugosité relative varie de 10^{-3} à $3,3 \cdot 10^{-2}$, ce qui lui permit de distinguer les zones rugueuses (où Λ est indépendant du nombre de Reynolds) de celles semi-rugueuses (où Λ varie en fonction de Re et de ε/D).

Les résultats présentant le coeffcient de perte de charge en fonction de la rugosité relative pour différentes valeurs du nombre de Reynolds de l'écoulement sont présentés sur la Figure 9.4. Lorsque $Re < 2\ 000$, le régime d'écoulement est laminaire et Λ est indépendant de ε/D et égal à $64/Re$. On constate ensuite que la transition vers le régime turbulent arrive à partir de $Re \sim 2\ 100$. Cependant, on observe qu'il est possible d'obtenir un nombre de Re critique plus élevé (jusqu'à 20 000) pour un ε/D petit. La région de transition $2000<Re<4000$, appelée région critique, est particulièrement complexe car les régimes laminaire et turbulent coexistent et il est donc très dificile de dégager une expression générale pour Λ. Lorsque Re>4000, le régime est totalement turbulent et Λ dépend de Re et de ε/D ou seulement de Re si celui-ci est suffisamment grand.

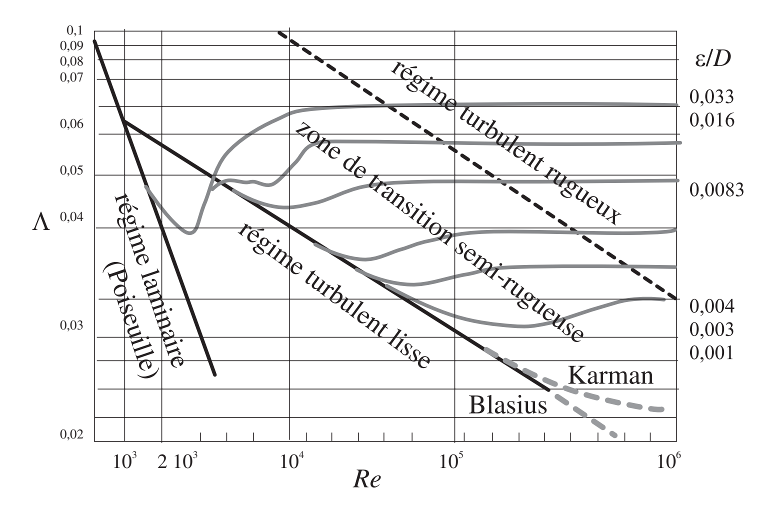


Figure 9.4 – **Diagramme de Nikuradse pour les conduites rugueuses.**

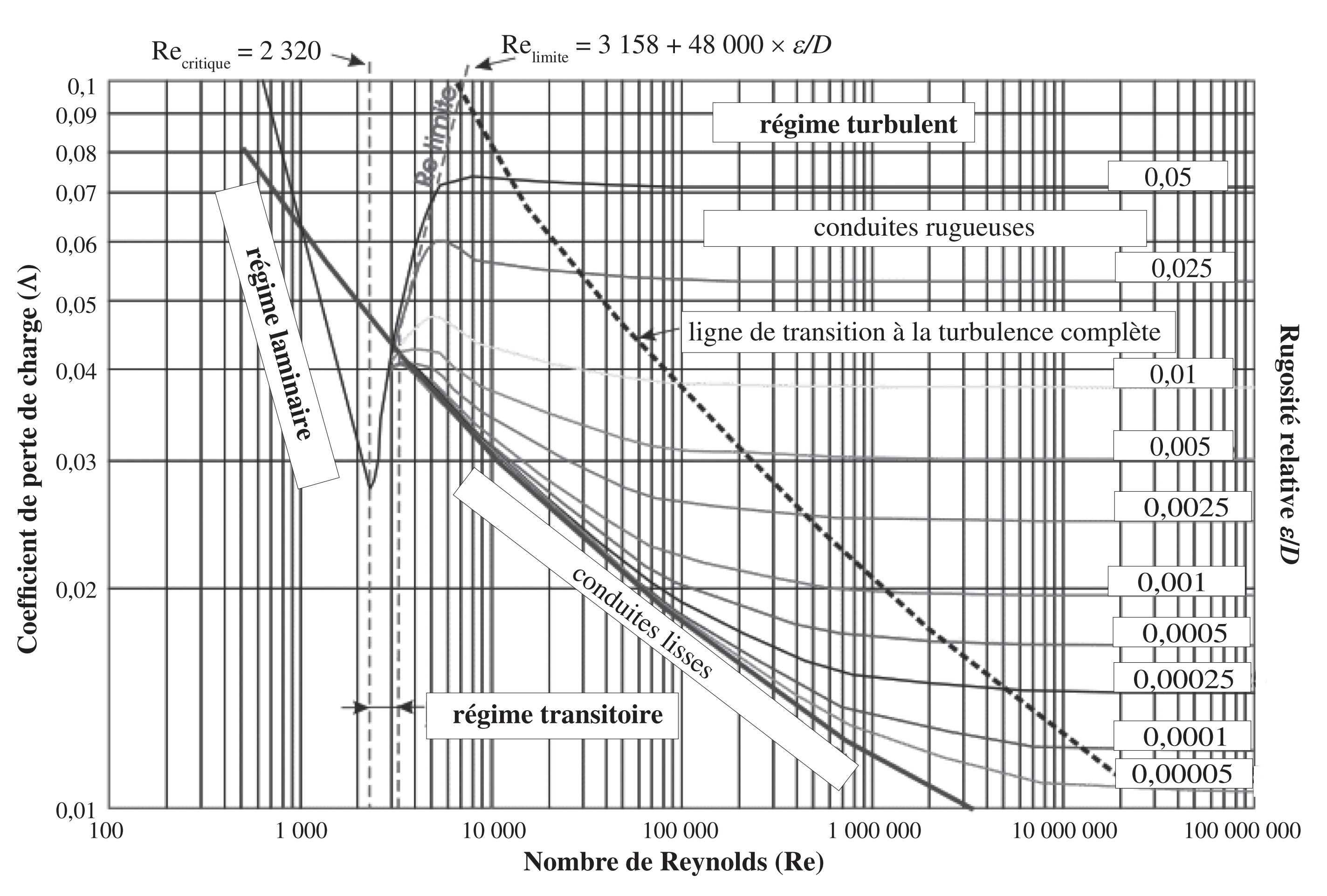


Figure 9.5 – Diagramme de Moody-Stanton reliant le coefficient de perte de charge régulière Λ au nombre de Reynolds Re et à la rugosité relative ε/D.

Tableau 9.1 – Différentes lois de corrélation en fonction du nombre de Reynolds et du type de rugosité.

Conduite			Régime d'écoulement	Relation
Lisse	**Rugueuse homogène**	**Rugueuse hétérogène**		
+			Laminaire ($Re < 2\,000$)	*Poiseuille* $\Lambda = \dfrac{64}{Re}$
+			Turbulent $2\,000 < Re < 5 \cdot 10^5$	*Blasius* $\Lambda = 0{,}316\,Re^{-0{,}25}$
+			Turbulent $Re > 5 \cdot 10^5$	*Karman* $\dfrac{1}{\sqrt{\Lambda}} = 2\log_{10}\left(\dfrac{Re\sqrt{\Lambda}}{2{,}51}\right)$
	+	+	Turbulent rugueux	*Karman-Prandtl* $\dfrac{1}{\sqrt{\Lambda}} = -2\log_{10}\left(\dfrac{\varepsilon/D}{3{,}71}\right)$
		+	Turbulent rugueux et semi-rugueux	*Colebrook* $\dfrac{1}{\sqrt{\Lambda}} = -2\log_{10}\left(\dfrac{\varepsilon/D}{3{,}71} + \dfrac{2{,}51}{Re\sqrt{\Lambda}}\right)$

On utilise généralement le diagramme de *Moody-Stanton* reliant le coefficient de perte de charge régulière Λ au nombre de Reynolds Re et à la rugosité relative. Ce diagramme est représenté sur la Figure 9.5 et permet de déterminer le coefficient de perte de charge régulière pour tous types d'écoulements (laminaire et turbulent).

La rugosité absolue moyenne des différents types de surface des conduits trouvés dans l'industrie est présentée au Tableau 9.2.

Des relations semi-empiriques peuvent aussi être utilisées en fonction du type de rugosité et du régime d'écoulement. Nous donnons ces relations dans le Tableau 9.2.

Une alternative à l'utilisation du diagramme de Moody est d'utiliser les relations de *Swanee* et *Jaim* :

$$h_r = 1{,}07\frac{Q_v^2\,L}{g\,D_h^5}\left\{\ln\left(\frac{\varepsilon}{3{,}7\,D_h} + 4{,}62\left(\frac{\nu\,D_h}{Q_v}\right)^{0{,}9}\right)\right\}^{-2},$$
$$10^{-6} < \frac{\varepsilon}{D_h} < 10^{-2},\; 5\,000 < Re < 3\times10^8 \tag{9.18}$$

$$Q_v = -0{,}965\sqrt{\frac{g\,D_h^5\,h_r}{L}}\,\ln\left(\frac{\varepsilon}{3{,}7\,D_h} + \left(\frac{3{,}17\,\nu^2\,L}{g\,D^3\,h_r}\right)^{0{,}5}\right),\; Re > 2000 \tag{9.19}$$

$$D = 0{,}66\left(\varepsilon^{1{,}25}\left(\frac{LQ_v^2}{g\,h_r}\right)^{4{,}75} + \nu Q_v^{9{,}4}\left(\frac{L}{g\,h_r}\right)^{5{,}2}\right)^{0{,}04}, \tag{9.20}$$

$$10^{-6} < \frac{\varepsilon}{D_h} < 10^{-2},\ 5\,000 < Re < 3\times 10^8$$

où $D_h = 2S/p_e$ (S étant la section et p_e le périmètre de section) représente le diamètre hydraulique. Ces 3 relations sont équivalentes. On choisit celle qui permet de calculer un paramètre inconnu connaissant les 2 autres.

Tableau 9.2 – **Rugosité absolue de conduits en fonction du type de matériau.**

Matériau	Condition	ε (mm)
Acier	Feuille de métal nouvelle Acier inoxydable Commercial, nouveau Rivé Rouillé	0,05 0,002 0,046 3,0 2,0
Fer	Fonte, nouvelle Forgé, nouveau Galvanisé, nouveau Fonte asphaltée	0,26 0,046 0,15 0,12
Cuivre	Tube étiré	0,002
Plastique	Tube étiré	0,0015
Verre	Lisse	0,0001
Béton	Lisse Rugueux	0,04 2,0
Caoutchouc	Lisse	0,01
Bois	Défoncé	0,5

9.4.4 Pertes de charge dans les conduites non circulaires

On utilise le diamètre hydraulique défini précédemment. Ceci conduit aux nouvelles expressions de la rugosité relative $\varepsilon/2D_h$ ainsi que du nombre de Reynolds et de la perte de charge régulière respectivement sous la forme :

$$Re = \frac{2U\,D_h}{\nu} \tag{9.21}$$

$$h_r = \Lambda\frac{L}{2D_h}\frac{U^2}{2g} \tag{9.22}$$

9.5 Pertes de charge singulières

Des pertes de charge apparaissent lors de changement de direction d'écoulement, de changement de diamètre, et lorsque des dispositifs (vannes, raccords et manchons, coudes, tés, etc.) sont disposés sur la ligne d'écoulement. Ces pertes sont typiquement exprimées par la relation :

$$h_s = \sum_i K_i \frac{U_i^2}{2g} \tag{9.23}$$

où U_i est la vitesse moyenne pour le dispositif et K_i le coefficient de perte de charge pour le dispositif *i* défini par :

$$K_i = \frac{h_{s_i} 2g}{U_i^2} = \frac{\Delta p_i}{\rho U_i^2 / 2} \tag{9.24}$$

Nous reportons dans le Tableau 9.3 quelques valeurs de K pour des dispositifs couramment utilisés. On note que le coefficient de perte de charge singulière est plus grand lorsque l'on considère des changements brusques de section de conduites que des changements progressifs.

On relie souvent les pertes de charge singulières à une longueur équivalente L_s de pertes de charge régulière :

$$h_s = K\frac{U^2}{2g} = h_r = \Lambda \frac{L_s}{D}\frac{U^2}{2g} \tag{9.25}$$

Soit :

$$L_s = D\frac{K}{\Lambda} \tag{9.26}$$

Exercice : élargissement brusque

On considère une conduite sur laquelle est placé un élargissement brusque. Calculer la perte de charge singulière générée par cette modification de la géométrie d'écoulement.

Solution

On applique le théorème d'Euler au fluide compris dans le volume de contrôle représenté sur la figure ci-dessous :

$$Q_m(U_2 - U_1) = p_1 S_1 - p_2 S_2 + p_1(S_2 - S_1)$$

On suppose que sur la surface (S_2-S_1) règne la pression p_1 et donc $p_1(S_2 - S_1)$ représente la poussée du fluide stagnant sur la paroi.

Par conséquent :

$$\rho U_2 S_2 (U_2 - U_1) = S_2 (p_1 - p_2)$$

$p_1 S_1$ $p_2 S_2$ $p_1(S_2 - S_1)$

Soit :

$$\frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_1}{\rho g} - U_2 \frac{(U_2 - U_1)}{g} = \frac{p_1}{\rho g} - \frac{U_2^2}{g} + \frac{U_2 U_1}{g}$$

Et donc finalement :

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{U_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} - \frac{U_2^2}{2g} + \frac{(U_2 - U_1)^2}{2g}$$

On voit donc que l'élargissement induit une perte de charge singulière :

$$h_s = \frac{(U_2 - U_1)^2}{2g} = \frac{U_1^2}{2g}\left(1 - \frac{U_2}{U_1}\right)^2 = \frac{U_1^2}{2g}\left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2$$

En comparant cette expression avec la relation (9.23) on trouve le coefficient de perte de charge singulière :

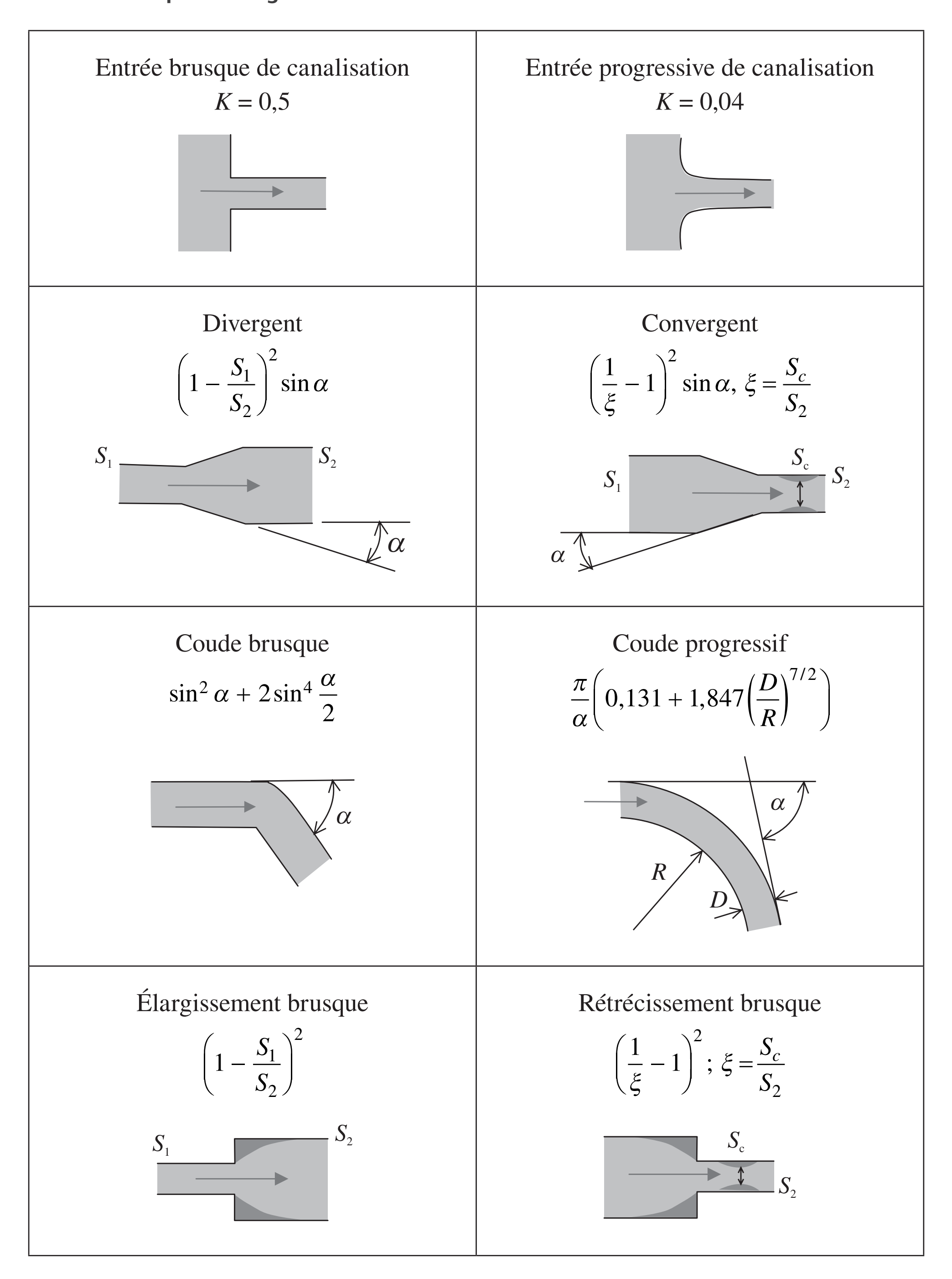
$$K = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2$$

Forme générale
de la relation de Bernoulli généralisée

En remplaçant les expressions des pertes de charges régulières et singulières trouvées précédemment dans la relation (9.7) on trouve alors :

$$\left(\frac{\overline{U^2}}{2g} + \frac{\overline{p}}{\rho g} + \overline{z}\right)_1 = \left(\frac{\overline{U^2}}{2g} + \frac{\overline{p}}{\rho g} + \overline{z}\right)_2 \pm \sum_i \frac{w_i}{g} \pm \sum_i \Lambda_i \frac{L_i}{D_i} \frac{U_i^2}{2g} \pm \sum_i K_i \frac{U_i^2}{2g}$$

Tableau 9.3 – Quelques expressions du coefficient de pertes de charge singulières *K* pour des géométries d'écoulements couramment utilisées.



Entrée brusque de canalisation $K = 0{,}5$	Entrée progressive de canalisation $K = 0{,}04$
Divergent $\left(1 - \dfrac{S_1}{S_2}\right)^2 \sin\alpha$ S_1, S_2, α	Convergent $\left(\dfrac{1}{\xi} - 1\right)^2 \sin\alpha,\ \xi = \dfrac{S_c}{S_2}$ S_1, S_c, S_2, α
Coude brusque $\sin^2\alpha + 2\sin^4\dfrac{\alpha}{2}$ α	Coude progressif $\dfrac{\pi}{\alpha}\left(0{,}131 + 1{,}847\left(\dfrac{D}{R}\right)^{7/2}\right)$ α, R, D
Élargissement brusque $\left(1 - \dfrac{S_1}{S_2}\right)^2$ S_1, S_2	Rétrécissement brusque $\left(\dfrac{1}{\xi} - 1\right)^2;\ \xi = \dfrac{S_c}{S_2}$ S_c, S_2

9.6 Pertes de charge pour un écoulement à surface libre dans un canal

L'ingénieur adopte une démarche comparable à celle développée pour l'écoulement dans des conduites lorsqu'il s'intéresse aux pertes de charges dans un écoulement à surface libre tel que celui ayant lieu dans le canal représenté sur la Figure 9.6. L'écoulement est provoqué par une inclinaison du canal d'un angle θ par rapport à l'axe horizontal.

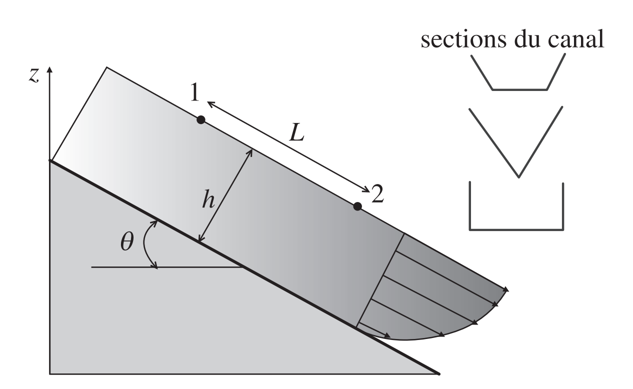


Figure 9.6 – Écoulement dans un canal incliné d'un angle θ par rapport à l'axe horizontal. La section du canal peut être l'une de celles représentées sur la figure.

La particularité de cet écoulement est la présence de la surface libre. Ainsi, les frottements entre le fluide en écoulement et la paroi solide du canal ont lieu sur une partie seulement du périmètre de la section d'écoulement. La relation de Bernoulli entre les points 1 et 2 s'écrit :

$$\frac{\not{p_1}}{\not{\rho} g} + \frac{\not{U_1^2}}{\not{2} g} + z_1 = \frac{\not{p_2}}{\not{\rho} g} - \frac{\not{U_2^2}}{\not{2} g} + z_2 + h_r \qquad (9.27)$$

avec : $U_1 = U_2$ et $p_1 = p_2 = p_{atm}$.

On trouve donc que la hauteur de perte de charge régulière est :

$$h_r = z_1 - z_2 = L \sin\theta \qquad (9.28)$$

D'après la définition de la perte de charge, on trouve donc :

$$h_s = \Lambda \frac{L}{D_h} \frac{U^2}{2g} = L \sin\theta \qquad (9.29)$$

avec : D_h le diamètre hydraulique de la section du canal. Soit donc :

$$U^2 = \frac{2 g D_h \sin\theta}{\Lambda} \qquad (9.30)$$

Lorsque l'écoulement est turbulent rugueux, Λ est indépendant du nombre de *Reynolds* (voir relation *Karman-Prandtl* dans le Tableau 9.1).

Donc :

$$U = C\sqrt{R_h \sin\theta}, \;\; R_h = \frac{D_h}{2} \tag{9.31}$$

$C = \sqrt{g/\Lambda}$ est appelé coefficient de *Chezy*. Sa valeur en fonction du rayon hydraulique est donnée à partir d'une relation empirique (tirée de résultats expérimentaux) sous la forme :

$$C = \frac{1}{n} R_h^{1/6} \tag{9.32}$$

où n est le paramètre de *Manning* qui dépend de la rugosité de la paroi (voir Tableau 9.4). On en déduit l'expression du débit volume dans le canal :

$$Q_v = U\,S = \frac{1}{n} S\,R_h^{2/3}\sqrt{\sin\theta} \tag{9.33}$$

Cette relation est celle de *Chezy-Manning*.

Tableau 9.4 – Quelques valeurs du paramètre de Manning pour certains types de matériaux.

Matériau	n
Brique	0,016
Béton	0,015
Sol avec pierre	2,035
Sol	0,022
Bois lisse	0,012
Bois rugueux	0,013

Exercices

9.1 Transfert de fluide entre 2 réservoirs

L'irrigation d'un domaine exige un débit de 40 l/s et utilise une pompe centrifuge.

La conduite d'aspiration a un diamètre de 200 mm, de longueur totale 8m et comprend :

- une crépine avec clapet de pied (K = 3,5) ;
- un coude à 135° (K = 0.15) ;
- un cône de raccordement à la pompe (K =0,1).

La hauteur géométrique d'aspiration est de 3 m.

La conduite de refoulement de diamètre 175 mm, de longueur 160 m, comprend :

- un cône divergent de raccordement à la pompe (K = 0,25) ;
- une vanne de réglage ouverte (K = 0,2) ;
- 3 coudes à 90° (K = 0,2) ;
- un clapet de retenue (K = 1,5) ;
- un débouché dans le réservoir supérieur (K = 0,5).

La hauteur géométrique totale d'élévation est de 17 m.

1. Calculer la hauteur nette que doit fournir la pompe.

2. Calculer les pressions effectives en termes de hauteur à l'entrée et à la sortie de la pompe.

3. Cette pompe est entraînée par un moteur électrique fournissant 12 kW. Quel est le rendement de la pompe ?

Données : masse volumique de l'eau $\rho = 10^3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$; viscosité de l'eau $\mu = 10^{-3}$ Pa.s, conduites en acier galvanisé ε = 0,15 mm.

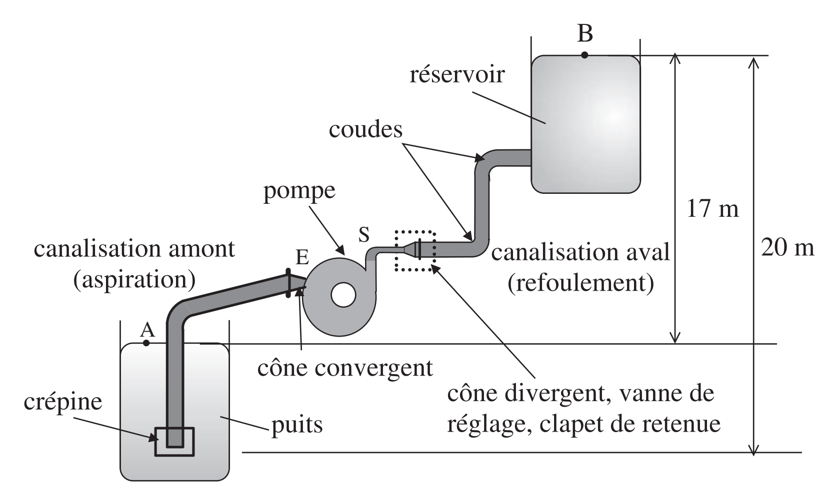


Figure 9.7

9.2 Pompe alimentant 2 réservoirs

Une pompe de rendement global η = 0,85 est utilisée pour transvaser de l'eau ($\rho = 1000\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\nu = 10^{-6}\,\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$) d'un réservoir A vers 2 réservoirs B et D. Les caractéristiques des conduits L_1, L_2 et L_3 sont indiquées sur la figure ci-dessous. On peut négliger les pertes de charge singulières. On veut assurer un débit $Q_{v_2} = 115\ \text{l}\cdot\text{s}^{-1}$ dans la conduite L_2.

1. Quelle est la nature de l'écoulement dans la conduite L_2 ? Justifier et calculer le coefficient de perte de charge Λ_2.

2. Calculer le débit dans la conduite L_3. Faire les remarques qui s'imposent.

3. Calculer la charge fournie par la pompe et la puissance sur l'arbre.

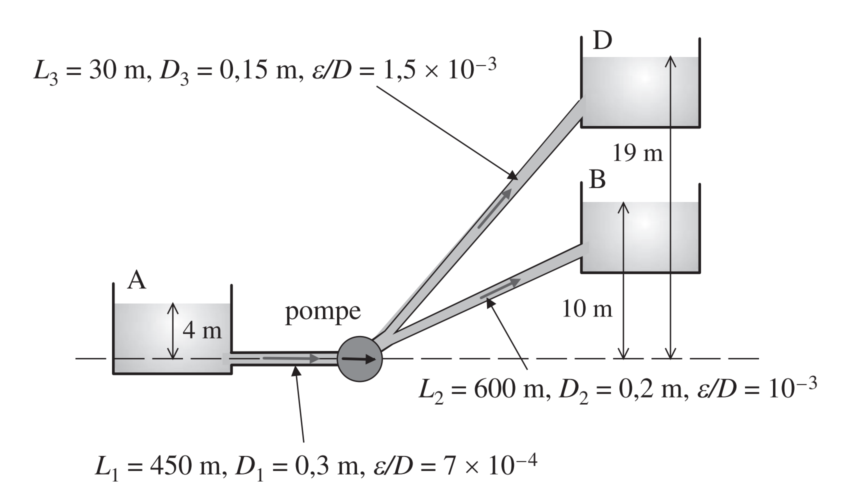


Figure 9.8

Solutions

9.1

1. On applique la relation de Bernoulli entre la surface libre du puits et la surface libre du réservoir :

$$\frac{p_A}{\rho g} + z_A + \frac{V_A^2}{2g} + H_n = \frac{p_B}{\rho g} + z_B + \frac{V_B^2}{2g} + \sum_i h_r^i + \sum_j h_s^j$$

La configuration étudiée conduit à : $p_A = p_B = p_{\text{atm}}$ et $V_A \approx 0$, $V_B \approx 0$ (hypothèse des réservoirs de grandes dimensions). On en déduit :

$$H_n = (z_B - z_A) + \sum_i h_r^i + \sum_j h_s^j = (z_B - z_A) + \sum_i \Lambda_i \frac{L_i}{D_i}\frac{U_i^2}{2g} + \sum_j K_j \frac{U_j^2}{2g}$$

Application à l'aspiration :

$$U_{asp} = \frac{4Q_v}{\pi D_{asp}^2} = \frac{4 \times 40 \times 10^{-3}}{\pi \times 0{,}2^2} = 1{,}27 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$Re_{asp} = \frac{\rho U_{asp} D_{asp}}{\mu} = \frac{10^3 \times 1{,}27 \times 0{,}2}{10^{-3}} = 2{,}55 \times 10^5, \; \frac{\varepsilon}{D} = \frac{0{,}15}{200} = 0{,}00075$$

Le diagramme de Moody conduit à $\Lambda_{asp} \simeq 0{,}018$ et le diagramme de Nikuradse dans la région semi-rugueuse avec corrélation de Colebrook conduit à $\Lambda_{asp} \simeq 0{,}0197$. On en déduit la perte de charge régulière : $h_r^{asp} = 0{,}0197 \times \dfrac{8}{0{,}2} \times \dfrac{1{,}27^2}{2 \times 9{,}81} = 0{,}065$ m.

Les pertes de charges singulières sont :

$$\sum_j h_s^j = \left(K_{\text{crépine}} + K_{\text{coude}} + K_{\text{cône}}\right)\frac{U_{asp}^2}{2g} = 0{,}308\ \text{m}.$$

Application au refoulement :

$$U_{ref} = \frac{4Q_v}{\pi D_{ref}^2} = 1{,}66\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1},\ Re_{asp} = \frac{\rho U_{ref} D_{ref}}{\mu} = 2{,}9\times 10^5,\ \frac{\varepsilon}{D} = \frac{0{,}15}{175} = 0{,}0009$$

Le diagramme de Moody conduit à $\Lambda_{ref} \simeq 0{,}018$ et le diagramme de Nikuradse dans la région semi-rugueuse avec corrélation de Colebrook conduit à $\Lambda_{ref} \simeq 0{,}02$. On en déduit la perte de charge régulière : $h_r^{asp} = 0{,}02 \times \dfrac{160}{0{,}175} \times \dfrac{1{,}66^2}{2\times 9{,}81} = 2{,}568\,\text{m}.$

Les pertes de charges singulières sont :

$$\sum_j h_s^j = \left(K_{\text{cône}} + K_{\text{coude}} + K_{\text{vanne}} + K_{\text{clapet}} + K_{\text{débouché}}\right)\frac{U_{ref}^2}{2g} = 0{,}428\ \text{m}$$

Et finalement la hauteur nette est :

$$H_n = 17 + (0{,}065 + 2{,}568) + (0{,}308 + 0{,}428) = 20{,}36\ \text{m}$$

2. Pour calculer la pression en entrée de la pompe on applique le théorème de *Bernoulli* entre les points A et E :

$$\frac{p_A}{\rho g} + z_A + \frac{U_A^2}{2g} = \frac{p_E}{\rho g} + z_E + \frac{U_E^2}{2g} + h_r^{asp} + h_s^{asp}$$

avec $p_A = p_{\text{atm}} = 0$ et $U_A \approx 0$, on en déduit :

$$\frac{p_E}{\rho g} = (z_A - z_E) - \frac{U_E^2}{2g} - h_r^{asp} - h_s^{asp} = -3{,}45\ \text{m}.$$

Pour calculer la pression en sortie de la pompe on applique le théorème de *Bernoulli* entre les points S et B :

$$\frac{p_S}{\rho g} + z_S + \frac{U_S^2}{2g} = \frac{p_B}{\rho g} + z_B + \frac{U_B^2}{2g} + h_r^{ref} + h_s^{ref}$$

Avec $p_B = p_{\text{atm}} = 0$ et $V_B \approx 0$, on en déduit :

$$\frac{p_S}{\rho g} = (z_B - z_S) - \frac{U_S^2}{2g} + h_r^{ref} + h_s^{ref} = 16{,}835\ \text{m}.$$

Ces résultats sont conformes à ceux attendus puisque à l'entrée de la pompe on est en dépression et en surpression à la sortie.

3. La puissance de la pompe est :

$$P_{pompe} = \rho g Q_v H_n = 7{,}99\ \text{kW}$$

Son rendement est : $\eta = \dfrac{P_{pompe}}{P_{arbre}} = 67\,\%.$

9.2

1. La vitesse du fluide dans la conduite L_2 est : $U_2 = U_{aval} = \dfrac{4Q_{v_2}}{\pi D_2^2} = 3{,}66 \text{ m·s}^{-1}$

Le nombre de Reynolds est donc : $Re = \dfrac{U_2 D_2}{\nu} = 7{,}32 \times 10^5$. Avec $\varepsilon_2/D_2 = 10^{-3}$, on voit donc que l'on a un écoulement turbulent rugueux. La relation de *Karmann-Prandtl* donne : $\lambda_2 = 0{,}0196$.

2. On applique le théorème de Bernoulli entre la sortie de la pompe et la surface libre du réservoir B :

$$\left(\frac{p_S}{\rho g} + z_S + \frac{U_S^2}{2g}\right) = \left(\frac{p_B}{\rho g} + z_B + \cancel{\frac{U_B^2}{2g}}\right) + \Lambda_2 \frac{L_2}{D_2}\frac{U_2^2}{2g}$$

Avec : $p_B = p_{atm}$.
On applique le théorème de Bernoulli entre la sortie de la pompe et la surface libre du réservoir D :

$$\left(\frac{p_S}{\rho g} + z_S + \frac{U_S^2}{2g}\right) = \left(\frac{p_D}{\rho g} + z_C + \cancel{\frac{U_D^2}{2g}}\right) + \Lambda_3 \frac{L_3}{D_3}\frac{U_3^2}{2g}$$

Avec : $p_D = p_{atm}$.
En égalisant les deux relations précédentes, on trouve :

$$z_B + \Lambda_2 \frac{L_2}{D_2}\frac{U_2^2}{2g} = z_C + \Lambda_3 \frac{L_3}{D_3}\frac{U_3^2}{2g}$$

Soit : $U_3 = \sqrt{\dfrac{D_3\, 2g}{L_3\, \Lambda_3}\left(z_B - z_C + \Lambda_2 \dfrac{L_2}{D_2}\dfrac{U_2^2}{2g}\right)}$

On suppose que l'écoulement est aussi turbulent rugueux dans L_3 et donc la relation de *Karman-Prandtl* donne :

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda_3}} = -2\log_{10}\left(\frac{1{,}75 \times 10^{-3}}{3{,}71}\right)$$

Soit : $\lambda_3 = 0{,}0213$. On en déduit que : $U_3 = 11{,}87 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (on retrouve alors que $Re = 1{,}78 \times 10^6$ ce qui correspond bien à un écoulement turbulent).
Le débit volume dans L_3 est ainsi :

$$Q_{v_3} = \frac{U_3\, \pi D_3^2}{4} = 0{,}21 \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1} = 210 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$$

Ce débit est le double de celui dans L_2 pour un plus petit diamètre. Les pertes de charge sont beaucoup plus importantes dans L_2 que dans L_3 (car $L_2 \gg L_3$).

3. Le débit dans L_1 est : $Q_{v_1} = Q_{v_2} + Q_{v_3} = 325\ \mathrm{l \cdot s^{-1}}$. Donc la vitesse du fluide est : $U_1 = Q_{v_1}/S_1 = 4{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Ceci conduit à un nombre de Reynolds : $\mathrm{Re} = U_1 D_1/\nu = 1{,}38 \times 10^6$. L'écoulement est turbulent rugueux et la relation de *Karman-Prandtl* donne : $\Lambda_1 = 0{,}018$.

En appliquant le théorème de Bernoulli entre les points A et B, on trouve $(U_A = U_B \approx 0, p_A = p_B = p_{\text{atm}})$:

$$\Delta H_{\text{pompe}} = (z_B - z_A) + \Lambda_1 \frac{L_1}{D_1}\frac{U_1^2}{2g} + \Lambda_2 \frac{L_2}{D_2}\frac{U_2^2}{2g} = 75{,}26\ \mathrm{m}$$

La puissance fournie par la pompe est : $P_{\text{pompe}} = \rho g Q_{v_1} \Delta H_{\text{pompe}} = 240\ \mathrm{kW}$.

Et la puissance sur l'arbre est : $P_{\text{arbre}} = \dfrac{P_{\text{pompe}}}{\eta} = 282\ \mathrm{kW}$.

Bibliographie

CANDEL S., *Mécanique des fluides*, DUNOD, 1990.

CHASSAING P., *Mécanique des fluides*, CEPADUES, 1997.

COMOLET R., *Mécanique expérimentale des fluides*, *Statique et dynamique des fluides non visqueux*, tome 1, DUNOD, Paris, 2002.

DESJARDINS D., COMBARNOUS M., BONNETON N., *Mécanique des fluides-Problèmes résolus avec rappels de cours*, DUNOD, Paris, 2002.

MONAVON A., *Mini manuel de Mécanique des fluides*, DUNOD, Paris, 2010.

OUZIAUX R., PERRIER J., *Mécanique des fluides appliquée*, DUNOD, Paris, 1998.

POTTER M. AND WIGGERT D. C., *Fluid mechanics, SCHAUM'S Outline Series*, McGRAW-HILL, New York, 2008.

ÉCOULEMENTS AUTOUR D'OBSTACLES – TRAÎNÉE ET PORTANCE

10

PLAN

OBJECTIFS

- Déterminer la répartition des pressions et des vitesses autour d'obstacles pour déterminer ensuite les expressions de la portance et de la traînée.
- Déterminer l'épaisseur de couche limite et calculer le coefficient de frottement

10.1 NOTION DE PORTANCE ET TRAÎNÉE

D'une manière générale, l'écoulement bi-dimensionnel autour d'un obstacle placé dans un champ de vitesse uniforme développe une fine couche tout le long de cet objet avec une grande variation de la vitesse autour de cet obstacle. Cette couche est appelée couche limite et est due à la viscosité du fluide. En outre, l'écoulement se sépare derrière l'objet générant des tourbillons dans son sillage. Prenons l'exemple de l'écoulement autour d'un cylindre comme illustré sur la Figure 10.1. L'écoulement du point amont « *a* » s'arrête à un point « *b* » sur la surface de l'objet avec la vitesse qui décroît jusqu'à zéro ; le point « *b* » est appelé point d'arrêt. L'écoulement se divise alors en deux parties au point « *b* ». Pour le cylindre, l'écoulement se sépare ensuite au point « *c* » en produisant un sillage avec des tourbillons (zone de décollement). En appliquant l'équation de Bernoulli entre le point amont « *a* » et le point d'arrêt « *b* », on peut déterminer la pression P_0 au point d'arrêt :

$$P_0 = P_\infty + \frac{\rho U^2}{2} \tag{10.1}$$

La pression P_0 est appelée pression d'arrêt.

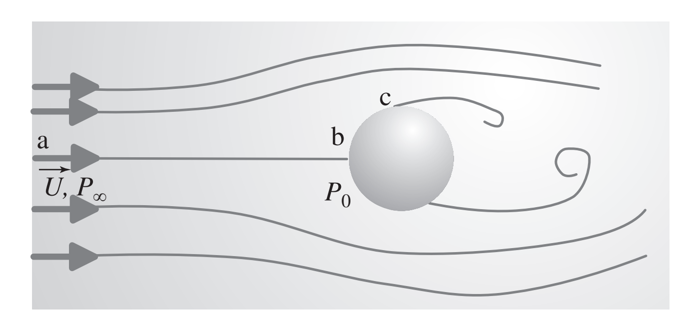


Figure 10.1 – **Écoulement autour d'un cylindre.**

10.2 Forces agissant sur l'obstacle

Lorsqu'un objet est placé dans un écoulement, il est soumis à une force provenant du fluide environnant. Une plaque plane placée dans la direction de l'écoulement n'est soumise qu'à une force dans la direction de l'écoulement. En revanche, dans le cas de l'écoulement autour d'un profil d'aile (voir Figure 10.2), la force $\overrightarrow{F}$ agissant sur l'obstacle peut être décomposée en une force $\overrightarrow{T}$ (Traînée ou « Drag ») dans la direction de l'écoulement et une force $\overrightarrow{L}$ (Portance ou « Lift ») normale à la vitesse $\overrightarrow{U}$.

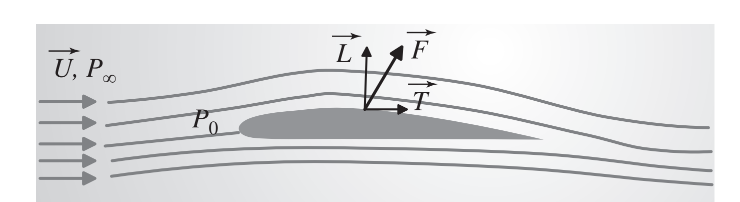


Figure 10.2 – **Écoulement autour d'un profil d'aile.**

Soit l'effort de pression P sur un élément de surface dS ainsi que l'effort tangentiel τ (ou de frottement) sur ce même élément dS. La force P dS due à la pression P agit normalement à la surface dS alors que la force de frottement τ agit de façon tangentielle (voir la Figure 10.3). La traînée T_p qui est l'intégrale sur la surface de l'ensemble de l'objet de la composante de la force P dS dans la direction de l'écoulement est appelée traînée de pression. La traînée T_f est une intégration similaire de la force τ dS et est appelée traînée de frottement. Ces deux forces peuvent s'écrire sous la forme suivante (voir Tableau 10.1) pour les valeurs de ces forces dans le cas d'objets usuels) :

$$\begin{cases} T_p = \iint_S p \; \mathrm{d}S \, \cos\theta \\ T_f = \iint_S \tau \; \mathrm{d}S \, \sin\theta \end{cases} \tag{10.2}$$

Par conséquent la traînée totale peut s'écrire : $T = T_p + T_f$

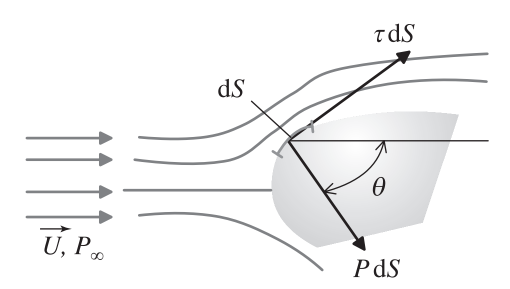


Figure 10.3 – Efforts de pression et de frottement sur un élément d*S*.

Tableau 10.1 – Quelques exemples de traînée de pression et de frottement.

Forme	Traînée de pression T_p (%)	Traînée de frottement T_f (%)
	0	100
	≈ 10	≈ 90
	≈ 90	≈ 10
	100	0

Avec le même raisonnement que pour la traînée, on peut déduire les expressions de la portance due à la pression et celle due au frottement :

$$\begin{cases} L_p = \iint_S -p \; \mathrm{d}A \sin\theta \\ L_f = \iint_S \tau \; \mathrm{d}A \cos\theta \end{cases} \qquad (10.3)$$

La portance totale peut donc s'écrire : $L = L_p + L_f$.

10.3 La traînée

La traînée est obtenue par le système (10.2) mais est en général difficile à obtenir théoriquement pour tous types d'obstacles et de vitesses excepté pour des objets de forme simple et pour des valeurs définies de la vitesse. Par conséquent, on se tourne souvent vers les expériences et on calcule la traînée par la formule suivante :

$$T = \frac{1}{2}\rho U^2 C_D S \tag{10.4}$$

où S est la surface projetée de l'objet sur un plan vertical à la direction de l'écoulement uniforme (surface frontale) et C_D est le coefficient de traînée sans dimension. Quelques exemples du coefficient C_D sont fournis dans le Tableau 10.2 en fonction de la géométrie et du type d'écoulement (nombre de Reynolds Re).

10.3.1 Traînée pour un cylindre

On considère l'écoulement autour d'un cylindre tel qu'il est représenté sur la Figure 10.4. Les hypothèses suivantes sont appliquées afin de trouver l'expression de la pression au point A en fonction de l'angle θ :

- Le fluide est parfait
- La théorie des écoulements potentiels (voir Chapitre 3) donne l'expression de la vitesse u_θ en fonction de la vitesse amont U :

$$u_\theta = 2U\sin\theta \tag{10.5}$$

Le signe positif vient du fait que l'angle θ est pris à partir de l'axe des x négatifs vers l'axe des y positifs (voir Figure 10.4).

On considère le point M à une pression P_∞ et à la vitesse $\vec{U}$ à l'amont de l'écoulement (à l'infini) et P la pression en un point donné A sur la surface du cylindre (voir Figure 10.4). En appliquant la relation de Bernoulli entre les points M et A sur le cylindre, on obtient :

$$P_\infty + \rho\frac{U^2}{2} = P + \rho\frac{u_\theta^2}{2} \text{ (on considère le cas } \delta y \approx 0) \tag{10.6}$$

D'après l'équation (10.5) :

$$\frac{P - P_\infty}{\rho U^2 / 2} = 1 - 4\sin^2\theta \tag{10.7}$$

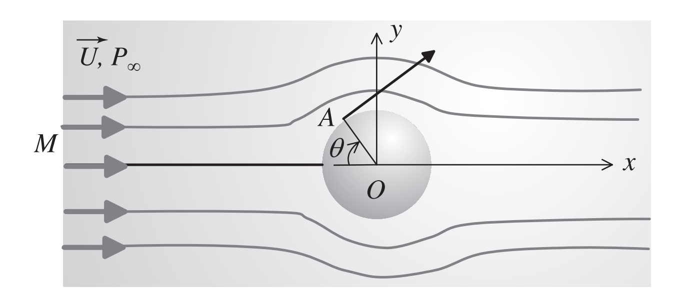


Figure 10.4 – Écoulement autour d'un cylindre.

Tableau 10.2 – Quelques valeurs du coefficient de traînée en fonction de la forme de l'obstacle et du nombre de Reynolds (b est la largeur des profils, A est la surface apparente au vent, l'écoulement est toujours dirigé de la gauche vers la droite).

<table>
<tr><th>géométrie</th><th>S</th><th>Re</th><th colspan="2">C_D</th><th>géométrie</th><th>S</th><th>Re</th><th colspan="2">C_D</th></tr>
<tr><td rowspan="5">D, R</td><td rowspan="5">$b \times D$</td><td rowspan="5">10^5</td><td>R/D</td><td>C_D</td><td rowspan="5">D</td><td rowspan="5">$b \times D$</td><td rowspan="5">$>10^4$</td><td colspan="2" rowspan="5">1,98</td></tr>
<tr><td>0</td><td>2,2</td></tr>
<tr><td>0,02</td><td>2,0</td></tr>
<tr><td>0,17</td><td>1,2</td></tr>
<tr><td>0,33</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td rowspan="5">R, D</td><td rowspan="5">$b \times D$</td><td rowspan="5">10^5</td><td>R/D</td><td>C_D</td><td rowspan="5">D, ℓ</td><td rowspan="5">$\pi D^2/4$</td><td rowspan="5">$>10^5$</td><td>l/D</td><td>C_D</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1,4</td><td>0,5</td><td>1,1</td></tr>
<tr><td>0,02</td><td>1,2</td><td>1</td><td>0,93</td></tr>
<tr><td>0,08</td><td>1,3</td><td>2</td><td>0,83</td></tr>
<tr><td>0,25</td><td>1,1</td><td>4</td><td>0,85</td></tr>
<tr><td rowspan="5">D</td><td rowspan="5">$b \times D$</td><td rowspan="5">2×10^4</td><td colspan="2" rowspan="5">2,3</td><td rowspan="5">θ, D</td><td rowspan="5">$\pi D^2/4$</td><td rowspan="5">$>10^4$</td><td>θ</td><td>C_D</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0,30</td></tr>
<tr><td>30</td><td>0,55</td></tr>
<tr><td>60</td><td>0,80</td></tr>
<tr><td>90</td><td>1,15</td></tr>
<tr><td>D</td><td>$b \times D$</td><td>$>10^4$</td><td colspan="2">2,15</td><td>D</td><td>$\pi D^2/4$</td><td colspan="3">1,4</td></tr>
<tr><td rowspan="5">D, ℓ</td><td rowspan="5">$b \times D$</td><td rowspan="5">$>10^4$</td><td>l/D</td><td>C_D</td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5">A</td><td colspan="3" rowspan="5">1,1</td></tr>
<tr><td>0,5</td><td>2,5</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2,2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1,6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1,3</td></tr>
<tr><td>D</td><td>$b \times D$</td><td>$>10^4$</td><td colspan="2">1,80</td><td></td><td>A</td><td colspan="3">0,96</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td rowspan="4">A</td><td colspan="2">U ($\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)</td><td>C_D</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4">A</td><td colspan="3" rowspan="4">1,4</td></tr>
<tr><td colspan="2">10</td><td>0,43</td></tr>
<tr><td colspan="2">20</td><td>0,26</td></tr>
<tr><td colspan="2">30</td><td>0,20</td></tr>
</table>

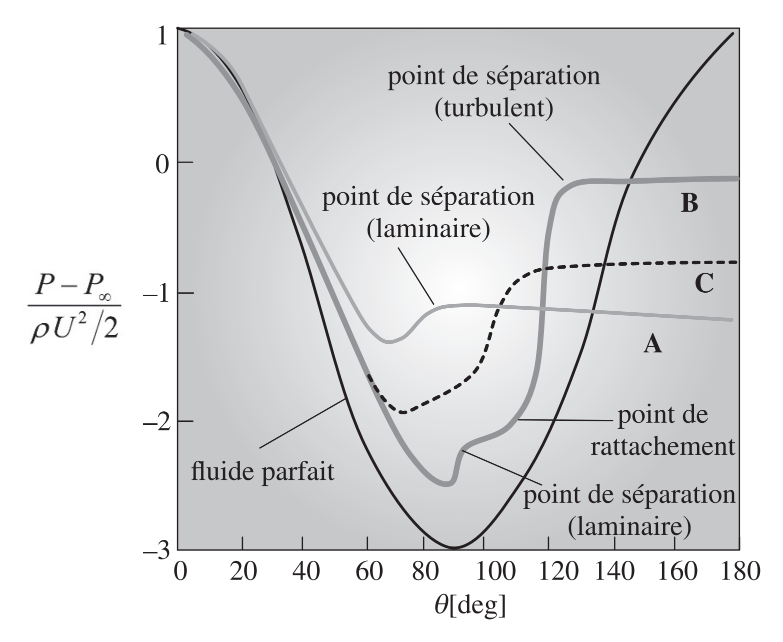


Figure 10.5 – Distribution de pression pour l'écoulement autour d'un cylindre.
A (Re = 1.1 x 10^5 < $Re_c^{lam->turb}$), B (Re = 6.7 x 10^5 > $Re_c^{lam->turb}$),
C (Re = 8.4 x 10^6 > $Re_c^{lam->turb}$)

La distribution de la pression adimensionnée $(P - P_\infty)/(\rho U^2/2)$ en fonction de θ est représentée sur la Figure 10.5 pour différents types d'écoulement. Le premier cas qui vient d'être décrit (fluide parfait) possède une courbe symétrique de part et d'autre de $\theta = 90°$. Par conséquent, la résistance (due à la pression) obtenue par intégration de la distribution de pression est nulle; aucune force n'agit sur le cylindre. Les autres cas correspondent au cas du fluide visqueux qui va être décrit ci-dessous.

10.3.2 Cas du fluide visqueux

Dans le cas d'un fluide visqueux mais pour des nombres de $Re = UD/\nu$ très petits ($Re \ll 1$) les lignes de courant arrivent symétriquement de part et d'autre du front du cylindre (voir Figure 10.4). Lorsque le nombre de *Re* croît (~2 à 30), la couche limite se sépare de façon symétrique à la position « *a* » (voir Figure 10.6a) et deux tourbillons contrarotatifs se forment derrière le cylindre ; puis à l'aval de ces deux tourbillons, les lignes de courant se rassemblent à nouveau. En augmentant encore le nombre de Reynolds *Re*, les tourbillons s'allongent et à $Re \approx 40 - 50$, une oscillation périodique du sillage est observé. Lorsque le nombre de Reynolds *Re* devient supérieur à 90 (voir Figure 10.6b et c), les tourbillons se détachent alternativement à partir du bas et du haut du cylindre. Lorsque $10^2 < Re < 10^3$, le point de séparation est légèrement en amont (à environ 80° du point d'arrêt). Ces détachements tourbillonnaires, de plus en plus intenses, sont appelés allées tourbillonnaires de *von Karman*. Lorsque *Re* augmente ($Re = 10^4$ sur la Figure 10.6d), les allées tourbillonnaires oscillent et, à $Re = Re_c = 3{,}8 \times 10^5$, la couche

limite près du cylindre devient turbulente et le point de séparation se déplace en aval du cylindre (à environ 130° du point d'arrêt, voir Figure 10.5).

Par conséquent, les deux transitions pour un écoulement de type stationnaire à un écoulement de type instationnaire et celui de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent sont caractérisées par des nombres de Reynolds critiques suivants :

$$Re_{crit}^{statio.\to insta.} \equiv 40-50, \qquad Re_{crit}^{lam.\to turb.} \equiv 3{,}8\ \ 10^5$$

En résumé, différents scénarios peuvent être décrits à partir de ces deux transitions :

- Lorsque le fluide est parfait, l'écoulement autour du cylindre est symétrique entre l'amont et l'aval comme dans le cas de la Figure 10.4.
- Pour un fluide visqueux :

  Lorsque $Re<47$, l'écoulement est laminaire ; on obtient alors deux tourbillons parfaitement symétriques et stationnaires (qui ne bougent pas dans le temps) derrière le cylindre (Figure 10.6a).

  Lorsque $47<Re<3{,}8\times10^5$, l'écoulement devient instationnaire et on obtient alors la génération de tourbillons appelés allées tourbillonnaires de von Karman (Figure 10.6b et c).

  Lorsque $Re>3{,}8\times10^5$, l'écoulement devient turbulent.

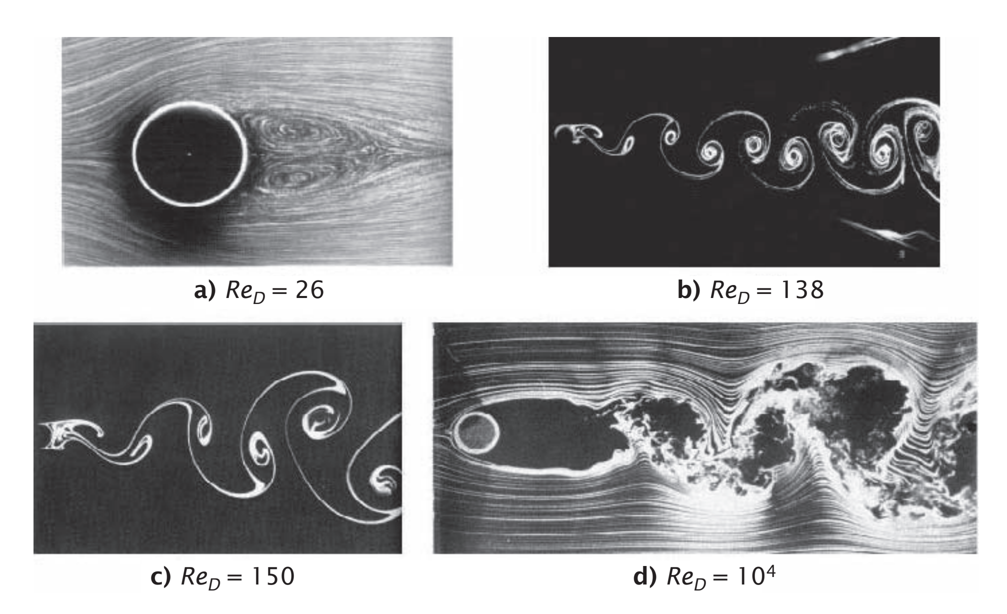


Figure 10.6 – Écoulement visqueux autour du cylindre en fonction du nombre de Reynolds.

La Figure 10.7 montre l'évolution du coefficient de traînée C_D en fonction du nombre de Reynolds pour un cylindre de diamètre d et de longueur infinie placé dans un écoulement uniforme de vitesse U ainsi que des obstacles de forme éliptique et profilée. Lorsque $Re = 10^3 - 2 \times 10^5$, $C_D \approx 1$ (valeur approximativement constante) mais lorsque $Re = 3{,}8 \times 10^5$, le coefficient C_D décroît jusqu'à une valeur de 0,3 car le point

de séparation change soudainement d'endroit (plus en aval) diminuant ainsi la zone de sillage derrière le cylindre.

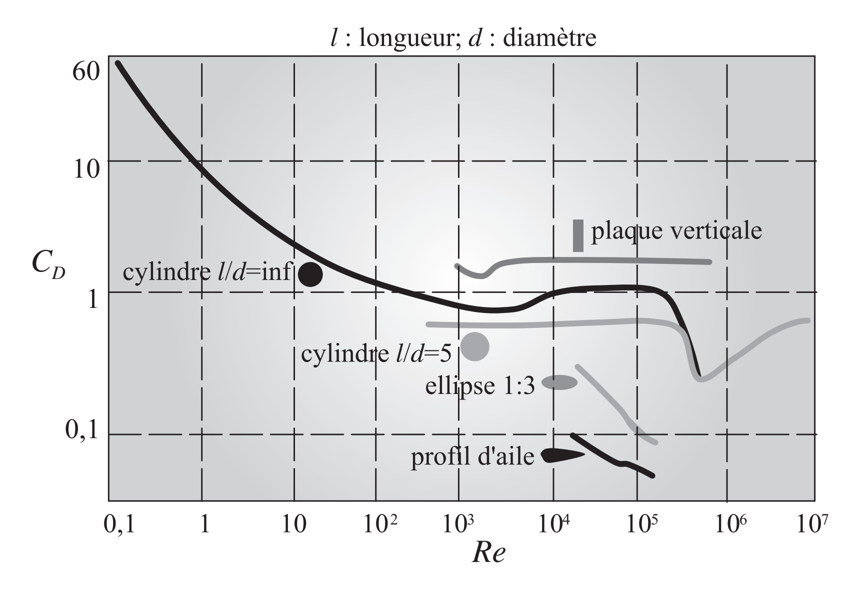


Figure 10.7 – Évolution du coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds pour des objets de formes cylindrique, elliptique et profilé.

Taylor (1886-1975) a déterminé empiriquement la fréquence d'oscillation des tourbillons en fonction du nombre de *Reynolds* pour ($250<Re<2\times10^5$) par l'équation suivante :

$$f = 0{,}198\ \frac{U}{d}\left(1 - \frac{19{,}7}{Re}\right) \tag{10.8}$$

Le nombre adimensionnel correspondant à la fréquence d'oscillation est appelé le nombre de *Strouhal* (voir chapitre 7) et est défini par :

$$St = \frac{f\,D}{U} \tag{10.9}$$

Lorsque les tourbillons de *von Karman* se développent, l'objet étudié subit un effort cyclique et il vibre parfois pour produire du son. Un exemple connu est le fil électrique qui « chante » dans le vent.

En général, la majeure partie de la traînée de frottement est issue du sillage car la ligne de courant se sépare derrière l'obstacle et développe par conséquent des tourbillons tout en diminuant la pression dans cette région. Si on souhaite réduire la traînée, il suffit de fabriquer un obstacle de façon à ce que l'écoulement ne se sépare pas : ces obstacles sont appelés *obstacles profilés*.

10.3.3 Traînée pour une sphère

L'évolution du coefficient de traînée pour une sphère est représentée sur la Figure 10.8. Pour des grandes valeurs du nombre de *Reynolds* Re ($Re = 10^3 - 2\times10^5$), la résistance

de la sphère est proportionnelle au carré de la vitesse et C_D est approximativement égal à 0,44. Lorsque *Re* atteint la valeur de 3 x 10^5, comme dans le cas du cylindre où la couche limite change d'un écoulement avec point de séparation laminaire à un écoulement avec point de séparation turbulent, C_D décroît jusqu'à la valeur 0,1 ou moins. Pour des plus grandes valeurs de *Re*, C_D s'approche graduellement de 0,1 dans le cas de l'ellipsoïde de rapport de forme 1 : 0,75.

Pour de faibles nombres de *Reynolds*, l'écoulement est connu sous le nom d'écoulement de *Stokes*. La force de traînée et le coefficient de traînée s'expriment par :

$$\begin{cases} T = 3\pi \mu U d \\ C_D = \dfrac{24}{Re} \end{cases} \tag{10.10}$$

Pour $10^3 < Re < 2 \times 10^5$, $C_D \approx 0{,}44 - 0{,}51$

Lorsque $Re > 3 \times 10^5$, C_D décroît et l'écoulement est turbulent (le décollement est plus en aval comme explicité précédemment).

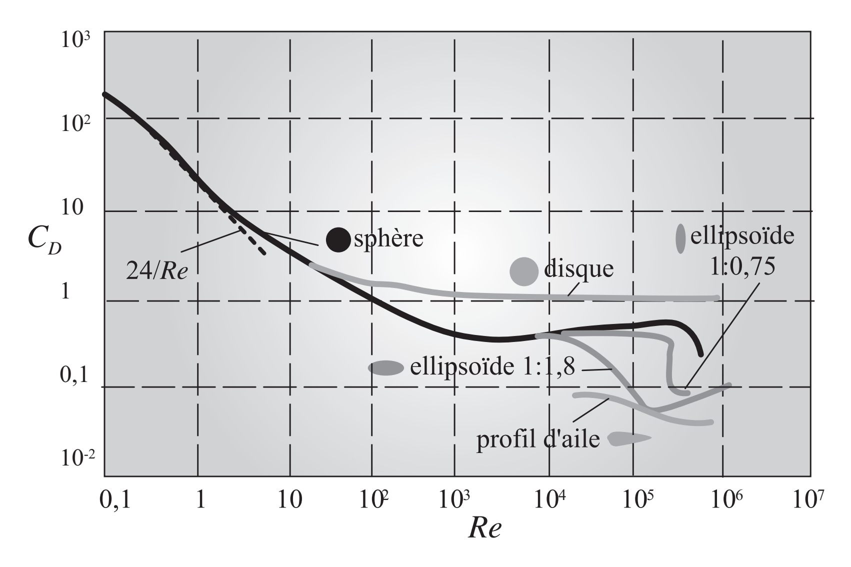


Figure 10.8 – Évolution du coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds pour des objets de forme sphérique et autres formes 3D.

Pour illustrer cette diminution du coefficient de traînée pour des nombres de *Reynolds* élevés, prenons l'exemple de la balle de golf (voir Figure 10.9). La balle de golf lisse a un coefficient de traînée qui est quasi constant à la valeur de 0,5 pour un nombre de *Reynolds* qui va jusqu'à la valeur d'environ 2×10^5. Ce coefficient diminue ensuite considérablement pour atteindre la valeur de 0,2 à $Re \approx 2 \times 10^6$. La balle de golf avec aspérités provoque un écoulement turbulent pour de faibles valeurs du nombre de *Reynolds*. Par conséquent, le décollement de la couche limite a lieu plus tardivement (c'est-à-dire bien en aval de la balle), ce qui entraîne une diminution de la zone visqueuse, donc du coefficient de traînée.

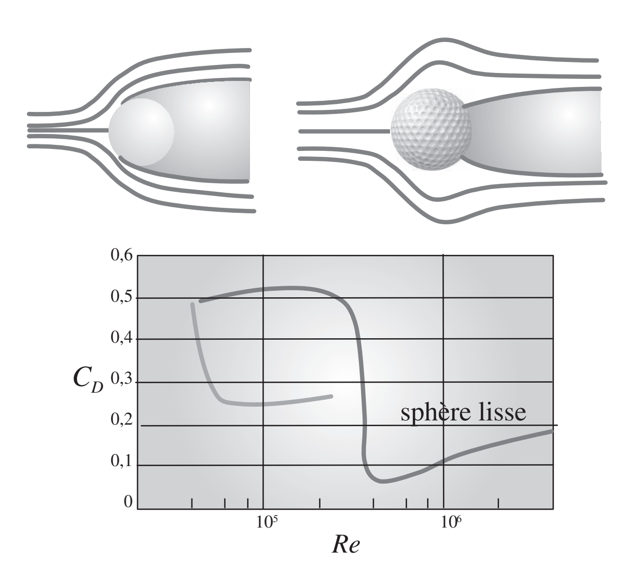


Figure 10.9 – Exemple de la balle de golf (d'après Moin et Kim, 1997, Scientific American).

10.4 La portance – Effet Magnus

On considère un écoulement de fluide parfait (c'est-à-dire sans décollement) autour d'un cylindre (voir Figure 10.10). Le cylindre tourne à la vitesse $u_0 = r_0\,\omega$. On souhaite déterminer la portance due à la pression.

On écrit l'équation de Bernoulli entre le point aval à l'infini (à la pression P_∞) et le point sur le cylindre (à la pression P) :

$$P_\infty + \frac{\rho U^2}{2} = P + \frac{\rho}{2}\left(2U\sin\theta + r_0\,\omega\right)^2 \tag{10.11}$$

D'où :

$$\frac{P - P_\infty}{1/2\rho U^2} = 1 - \left(\frac{2U\sin\theta + r_0\,\omega}{U}\right)^2 \tag{10.12}$$

La portance due à la pression peut être calculée à partir de la relation (10.3) en considérant la pression effective $p = P - P_\infty$ et la relation concernant l'expression de la portance (l'écoulement étant celui d'un fluide parfait, on considère qu'il est symétrique de part et d'autre de la ligne (-π/2, π/2)) :

$$\begin{aligned} L_p &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\left(p - p_\infty\right)\, r_0\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= -\rho U^2 r_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[1 - \left(\frac{2U\sin\theta + r_0\omega}{U}\right)\right]\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{10.13}$$

Figure 10.10 – **Écoulement parfait avec rotation autour d'un cylindre.**

En développant l'expression précédente et sachant que :

$$\begin{cases} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta = 0 \\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3\theta \, d\theta = 0 \\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2\theta) \, d\theta = 0 \end{cases}$$

et que $\sin^2\theta = (1 - \cos 2\theta)/2$, on obtient finalement :

$$L_p = 2\pi r_0 u_0 \rho U \tag{10.14}$$

Cette force de portance due à la rotation de la sphère, appelée aussi *effet Magnus*, découvert par *Heinrich Gustav Magnus* (1802-1870), physicien allemand, permet notamment d'expliquer les effets de balle dans le sport. Notamment au football le but de Roberto Carlos lors d'un coup franc pour le match France-Brésil en 1998 : ce coup franc tiré dans une direction hors du champ de but était accompagnée d'une rotation de la balle sur elle-même afin de faire subir à la balle l'effet Magnus (Carlos connaissait-il cet effet ?). On peut aussi citer d'autres exemples comme le fonctionnement de certains modes de propulsion ainsi que le phénomène de portance (portance des ailes d'avion).

10.5 Traînée sur une plaque plane – Notion de couche limite

On considère un écoulement uniforme de vitesse U sur une plaque plane de longueur l (voir Figure 10.11) ; une couche limite se développe autour de cette plaque due à la viscosité.

Soit $\delta(x)$ l'épaisseur de cette couche limite à une distance x du bord d'attaque. Le débit-masse dans une couche élémentaire dy de la couche limite et à une distance x du bord d'attaque est : $\rho u \, dy$. A partir de la différence de quantité de mouvement entre le

bord d'attaque et le point d'abscisse x, la traînée de frottement peut être calculée comme suit :

$$T_f = \int_0^\delta \rho u\,(U - u)\,\mathrm{d}y \tag{10.15}$$

Soit τ_0 la contrainte visqueuse et comme $\mathrm{d}T_f = \tau_0\,\mathrm{d}x$, on obtient alors :

$$\tau_0 = \frac{\mathrm{d}T_f}{\mathrm{d}x} = \rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta u\,(U - u)\,\mathrm{d}y \tag{10.16}$$

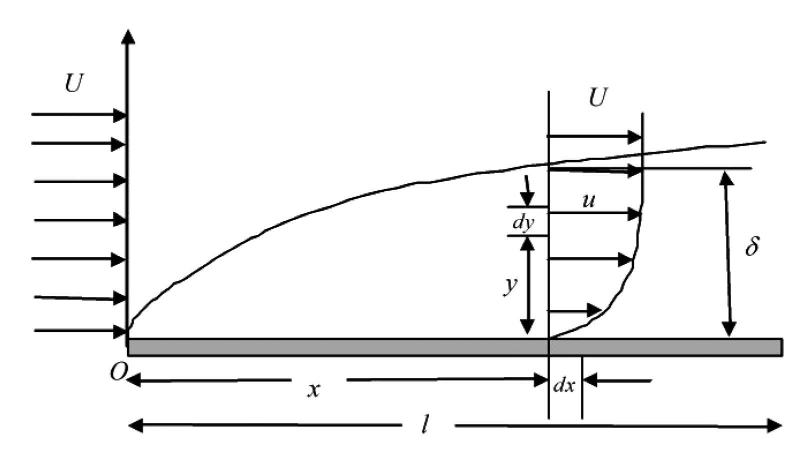


Figure 10.11 – **Écoulement autour d'une plaque plane.**

10.5.1 Couche limite laminaire

Le problème classique (initialement considéré par *Blasius*) consistait en un écoulement 2D stationnaire, incompressible autour d'une plaque plane à angle d'incidence nulle par rapport à l'écoulement amont uniforme à vitesse U. Le fluide s'étend à l'infini dans toutes les directions à partir de la plaque (voir Figure 10.12). Les équations de couche limite appelées aussi équations de Prandtl peuvent s'écrire :

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \tag{10.17}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \tag{10.18}$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$y = 0,\ u_x = u_y = 0$$

$$y \to \infty,\ u_x = U$$

En fait dans l'équation (10.17), le terme de gradient de pression est absent car lorsqu'on s'éloigne de la paroi, les effets sont quasi-nuls et la vitesse est U, ce qui entraîne par conséquent un gradient de pression nul. Cette propriété est particulière à ce type d'écoulement (plaque plane dans un domaine infini). Elle n'est pas valable par exemple lorsqu'on ajoute une deuxième plaque et qui revient à considérer l'écoulement entre deux plaques planes. Les équations contiennent alors le terme de gradient de pression. Le principe de similitude nous permet d'écrire le rapport des vitesses comme :

$$\frac{u}{U} = F\left(\frac{y}{\delta}\right) = F(\eta)$$

où $\eta = y\ /\ \delta$ avec δ qui correspond à l'épaisseur de la couche limite. Une analyse d'ordre de grandeur de l'équation (10.17) donne $u_x^2/x \sim \nu u_x/\delta^2$. La fonction F peut être déterminée par la théorie de Blasius.

Considérons cette distribution de vitesse u (ou la fonction F) parabolique autour de la plaque plane. Cette distribution de vitesse qui vérifie bien les équations (10.17-10.18) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\eta = \frac{y}{\delta};\quad \frac{u}{U} = 2\eta - \eta^2 \tag{10.19}$$

En substituant l'équation (10.19) dans (10.16), on obtient :

$$\tau_0 = \rho U^2 \frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x} \int_0^1 \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right)\mathrm{d}\eta = 0{,}133\ \rho U^2\ \frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x} \tag{10.20}$$

Par ailleurs la contrainte à la paroi $\tau_p = \mu \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0} = 2\mu \frac{U}{\delta}.$

Donc $\delta\ \mathrm{d}\delta = 15{,}04\ \frac{\mu}{\rho U}\ \mathrm{d}x$ et par conséquent :

$$\frac{\delta^2}{2} = 15{,}04\ \frac{\nu}{U}\ x + cste \tag{10.21}$$

Lorsque $x = 0$, $\delta = 0$ et donc $cste = 0$. La solution en δ s'écrit alors :

$$\delta = \frac{5{,}48}{\sqrt{Re_x}} x \tag{10.22}$$

Avec $Re_x = Ux/\nu$ le nombre de Reynolds à une abscisse x donnée. En substituant dans (10.20), on obtient la contrainte dans la couche limite :

$$\tau_0 = 0{,}73\ \frac{\rho U^2}{2}\ \frac{1}{\sqrt{Re_x}} \tag{10.23}$$

Comme représenté sur la Figure 10.12, l'épaisseur de couche limite augmente comme $\sqrt{x}$ alors que la contrainte diminue comme $1 / \sqrt{x}$. La traînée de frottement de la plaque d'épaisseur b peut être obtenue en intégrant (10.23) suivant x :

$$T_f = \int_0^l \tau_0 \, dx = 0,73 \sqrt{\mu \rho U^3 l b} \tag{10.24}$$

Or $T_f = C_f \, l \rho U^2 / 2$ et par conséquent le coefficient de frottement C_f a pour expression :

$$C_f = \frac{1,46}{\sqrt{Re_l}} \tag{10.25}$$

où $Re_l = Ul/\nu$ est le nombre de *Reynolds* basé sur la longueur de la plaque. Il faut savoir que cette valeur du C_f coïncide avec celle des expériences pour des nombres de $Re_l < 5 \times 10^5$.

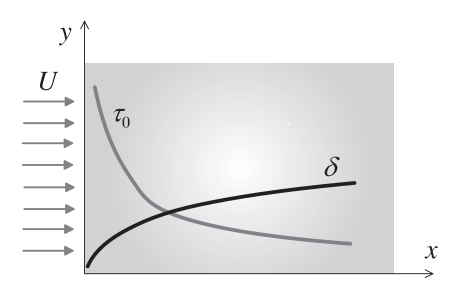


Figure 10.12 – Épaisseur de couche limite et contrainte de paroi en fonction de x.

10.5.2 Couche limite turbulente

Lorsque Re_l devient très grand, la longueur de la couche limite qui est laminaire devient tellement petite que la couche peut être considérée comme une couche limite turbulente sur toute la longueur de la plaque plane. La vitesse u est donnée par la relation suivante dans le cas d'un écoulement turbulent dans une conduite (voir exercice 8.4) :

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} = \eta^{1/7} \tag{10.26}$$

Avec une démarche identique à celle du cas laminaire, on obtient pour l'épaisseur de la couche limite, la contrainte à la paroi et la traînée due au frottement :

$$\delta = \frac{0,37\ x}{Re_x^{1/5}} \ ; \ \tau_0 = 0,029\ \rho\ U^2 \left(\frac{1}{Re_x}\right)^{1/5} \ ; \ T_f = \frac{0,036\ \rho\ U^2 l}{Re_l^{1/5}} \tag{10.27}$$

Et par conséquent, on en déduit le coefficient de frottement : $C_f = 0,072\ Re_l^{-1/5}$. La variation de ce coefficient de frottement avec le nombre de Reynolds basé sur la longueur de la plaque est illustrée sur la Figure 10.13.

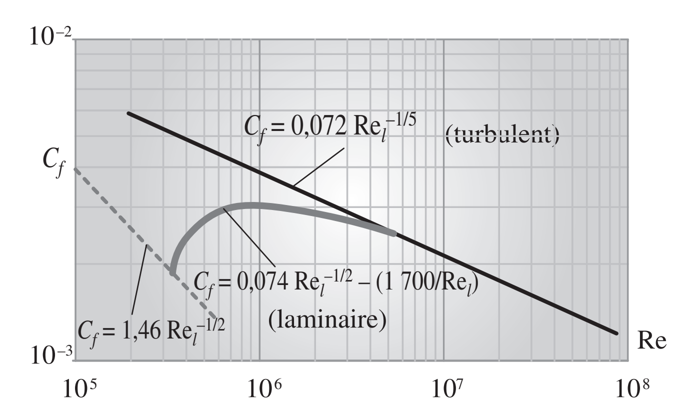


Figure 10.13 – Variation du coefficient de frottement en fonction du nombre de Reynolds.

10.6 ÉCOULEMENT AUTOUR D'UN PROFIL D'AILE D'AVION

On considère l'écoulement autour d'un corps. Si ce dernier est fabriqué de telle façon que la portance est plus grande que la traînée alors ce corps est profilé. L'exemple le plus connu est le profil d'aile d'avion.

Considérons l'écoulement autour d'un profil d'aile tel que celui représenté sur la Figure 10.14. Cet écoulement génère des forces de traînée et portance qui ont une grande importance dans la conception d'un avion par exemple. En général, l'écoulement de fluide autour d'objets en mouvement (avion, sous-marin, voiture de course ou même un oiseau) ou fixes (ballons météorologiques, immeubles ou arbres) produisent une force résultante. Cette force peut être décomposée en une force parallèle à l'objet en mouvement qui est la force de traînée et une force dans la direction verticale (contre la gravité) qui est la force de portance (ces deux forces ont été introduites précédemment). La surface $A = b\, l$ (b représente l'envergure et l la corde) représente la surface alaire ou maître couple (surface de projection maximale) par unité de longueur, les forces totales de portance L_t et de traînée T_t ainsi que le moment M peuvent s'écrire sous la forme suivante:

$$\begin{cases} P_t = C_L\ l\ \dfrac{\rho U^2}{2} \\ T_t = C_D\ l\ \dfrac{\rho U^2}{2} \\ M = C_M\ l^2\ \dfrac{\rho U^2}{2} \end{cases} \qquad (10.28)$$

où C_L, C_D, C_M sont les coefficients de portance, de traînée et du moment.

Sur la Figure 10.14, la ligne qui connecte le bord d'attaque au bord de fuite est appelée la corde. La ligne qui connecte les points milieux des faces supérieure et inférieure de

la section du profil d'aile est appelée ligne de cambrure. En général, on utilise beaucoup plus sa valeur maximale. L'angle α entre la corde et la direction de l'écoulement représentée par la vitesse U est appelé angle d'attaque.

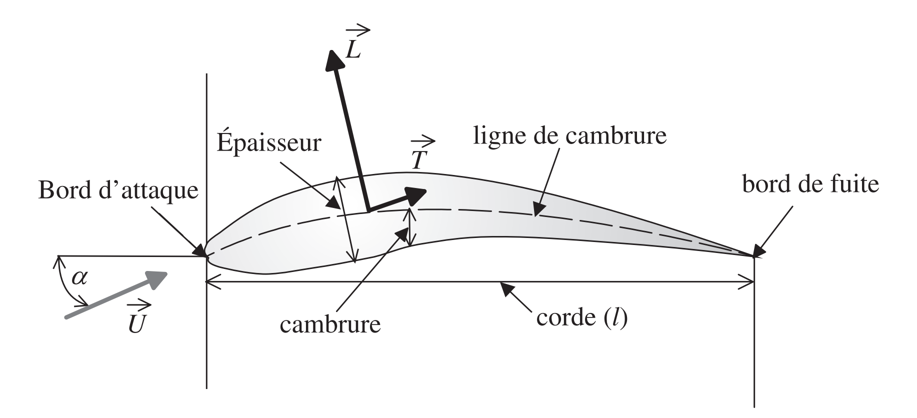


Figure 10.14 – Définitions géométriques sur un profil d'aile.

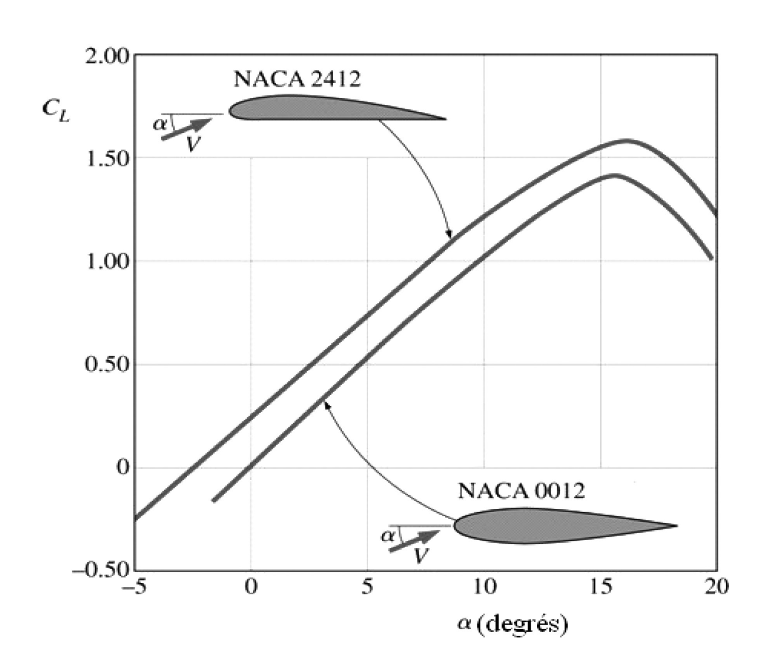


Figure 10.15 – Coefficient de portance en fonction de l'angle d'attaque pour deux profils d'aile de type NACA.

La Figure 10.15 représente le coefficient de portance en fonction de l'angle d'attaque α pour deux profils de type NACA (*National Advisory Committee for Aeronautics*, renommé en 1959 NASA pour *National Aeronautics and Space Administration*). La première famille de profils d'aile est du type NACA à 4 chiffres. Le premier chiffre correspond au maximum de cambrure en pourcentage de la corde (longueur d'aile), le

deuxième indique la position du maximum de cambrure en dixième de la corde, et les deux derniers nombres donnent le maximum d'épaisseur du profil en pourcentage de la corde. Par exemple, le profil NACA 2412 a un maximum d'épaisseur de 12% avec une cambrure de 2% localisée à 40% du bord d'attaque (ou 0,4 l).

La portance augmente linéairement en fonction de α jusqu'à une certaine valeur à partir de laquelle elle décroît assez subitement. Cette décroissance est due au fait que l'écoulement se sépare sur la surface supérieure de l'aile (voir Figure 10.15) car l'angle d'attaque a augmenté trop fortement. Ce phénomène correspond au *décrochage* de l'aile.

Décrochage

On parle souvent de *vitesse de décrochage* comme d'une caractéristique de l'avion. Pour une configuration donnée, le décrochage ne se produit pas toujours à la même vitesse ; il n'est caractérisé que par l'angle d'incidence de décrochage. En vol, l'angle d'incidence varie selon la vitesse, la masse et le facteur de charge (gravité ou accélération) que subit l'avion. On peut donc atteindre l'incidence de décrochage à des vitesses très variables en fonction du facteur de charge. La vitesse de décrochage évolue approximativement selon la racine carrée du facteur de charge. Le décrochage apparaît lorsque :

- les gouvernes deviennent molles, elles sont moins efficaces ;
- l'avion vibre, cela est dû à l'écoulement tourbillonnaire de l'air sur l'aile après le décollement des filets ;
- l'avertisseur de décrochage. C'est une palette située sur le bord d'attaque de l'aile qui est soulevée vers le haut par le vent relatif lorsque l'angle d'incidence atteint une valeur proche de l'incidence de décrochage. Le pilote est averti par une lumière et/ou par une sonnerie.

Conséquences du décrochage

Lors du décrochage, l'avion s'enfonce, et il peut effectuer une *abattée* (piquer du nez), ce qui entraîne dans les deux cas une perte d'altitude. Près du sol, par exemple au dernier virage précédant l'atterrissage, la perte d'altitude peut ne pas être rattrapée.

Si une seule aile décroche, on parle de *décrochage dissymétrique*, ce qui peut conduire à une vrille.

Suite à un décrochage, il faut pousser sur le manche pour retrouver un angle d'incidence inférieur à l'incidence de décrochage, ce qui permet généralement de redonner de la vitesse à l'avion en piquant légèrement, avant de tirer doucement pour redresser la trajectoire et cabrer à nouveau.

La polaire d'Eiffel permet de déterminer l'angle optimal pour lequel l'avion a un rapport C_L/C_D maximal (voir Figure 10.17).

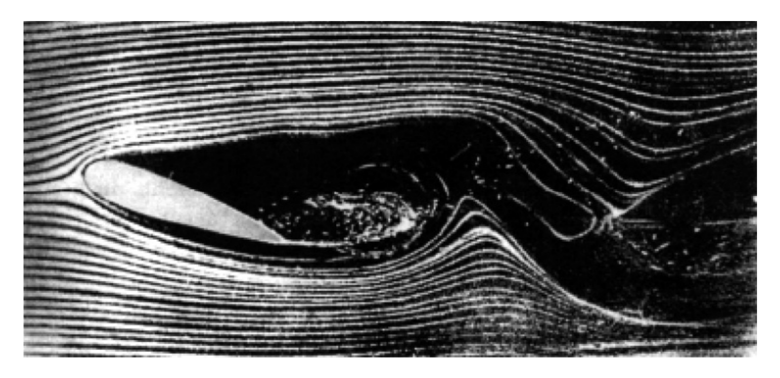


Figure 10.16 – Séparation de l'écoulement autour d'un profil d'aile.

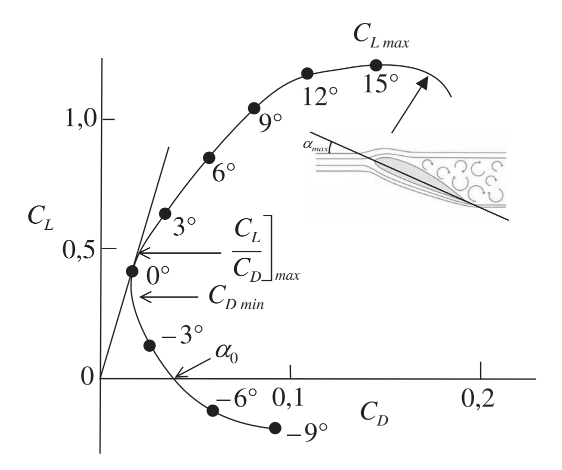


Figure 10.17 – Polaire d'Eiffel pour un profil d'aile donné.

Exercices

10.1 Écoulement autour d'une plaque

On considère un écoulement d'air sur une plaque plane mince de largeur $b = 6$ m et de longueur $L = 1,2$ m. dans les conditions standards comme indiqué sur la Figure 10.18. Dans le premier cas (a), la plaque est parallèle à l'écoulement amont (à vitesse $U = 7,5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et à pression atmosphérique, que l'on supposera nulle) et dans le deuxième cas (b), elle en est perpendiculaire. La contrainte visqueuse à la paroi (déterminée expérimentalement) est donnée par :

$$\tau_p = \tau_p(x) = \frac{5 \times 10^{-4}}{\sqrt{x}}\ \mathrm{N \cdot m^{-2}}$$

et les distributions de la pression et de la contrainte visqueuse dans le cas (*b*) (voir figure) sont les suivantes :

$$P(y) = 0,03\left(1 - \frac{y^2}{0,36}\right)\ \mathrm{N \cdot m^{-2}} \text{ et } \tau_p(y) = -\tau_p(-y)$$

Déterminer les portance et traînée appliquées sur la plaque dans les deux cas en négligeant leurs effets sur l'épaisseur de la plaque.

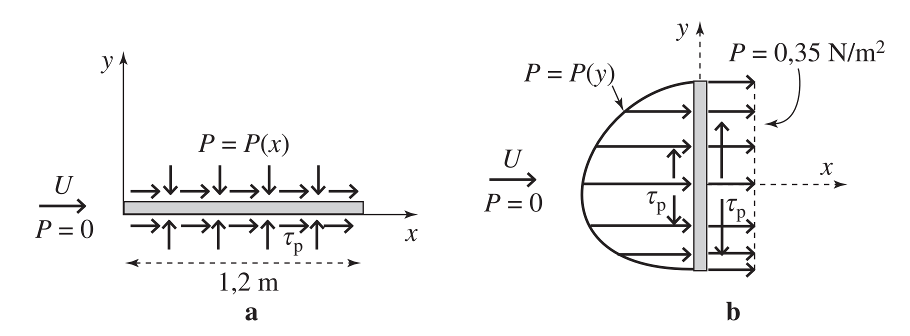


Figure 10.18 – Schéma des écoulements autour de plaques planes horizontale et verticale.

10.2 Écoulement autour d'une balle

Une balle de golf bien frappée de diamètre 4,25 cm et de poids 0,44 N peut aller à une vitesse $U = 60\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ lorsqu'elle quitte le point de départ. Une balle de tennis de table (supposée lisse) bien frappée elle aussi, de diamètre 3,75 cm et de poids 0,025 N peut partir à une vitesse de $18\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ lorsqu'elle quitte la raquette. Le coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds est donné sur la Figure 10.19. On prendra pour l'air dans les conditions standards $\nu = 1,4 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$ et $\rho = 1,2\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

1. Déterminer la force de traînée sur une balle de golf standard, sur une balle de golf lisse et sur une balle de tennis de table pour les conditions données ci-dessus et d'après la Figure 10.19.

2. Déterminer alors la décélération de chaque balle.

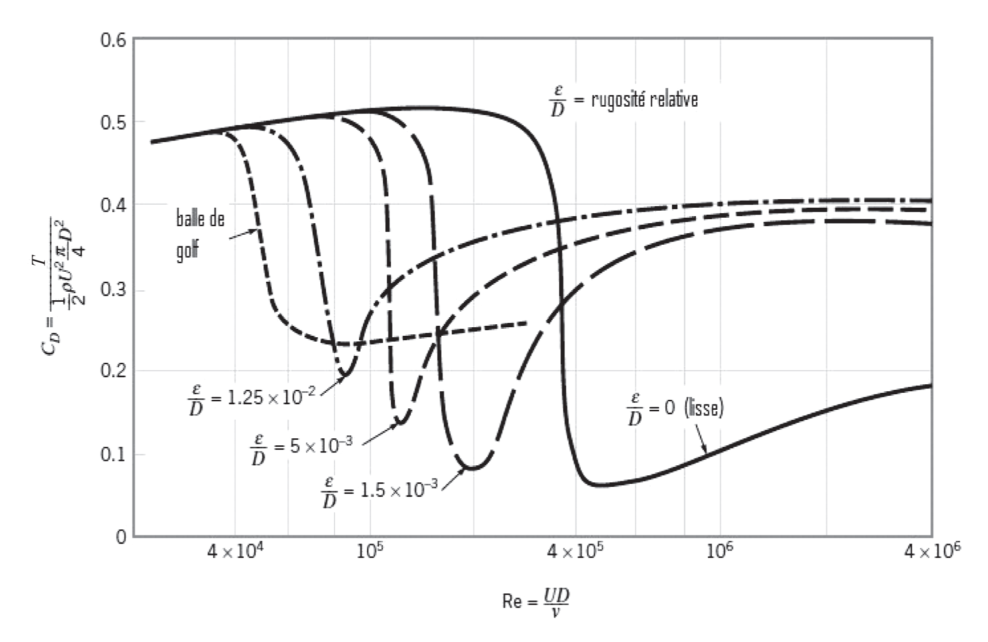


Figure 10.19 – **Coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds pour l'écoulement autour d'une sphère.**

10.3 Faire voler un avion avec ses jambes

On fait voler un avion à énergie musculaire sur un parcours de 1,6 km en forme de huit. Les données relatives à cet engin sont les suivantes :

- Vitesse de vol : $V = 4{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$
- Envergure de l'aile : $b = 28{,}8$ m, corde : $c = 2{,}25$ m
- Poids de l'engin (incluant le pilote) : $P_{oids} = 932$ N
- Coefficient de traînée : $C_D = 0{,}046$ (basé sur la surface projetée face à l'écoulement)
- Rendement correspondant au rapport de la puissance due à la traînée sur la puissance fournie par le pilote : $\eta = 0{,}8$
- Masse volumique de l'air : $\rho = 1{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

Déterminer le coefficient de portance C_L ainsi que la puissance fournie par le pilote.

10.4 Coulée d'une boule dans l'océan

Une boule métallique de 0,45 m de diamètre pesant 68 kg est lâchée dans l'océan à partir d'un bateau. Déterminer la vitesse maximale de la balle lorsqu'elle tombe dans l'eau de mer avec $\rho = 1\,030\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et $\mu = 1{,}57 \times 10^{-3}$ Pa*s*.

10.5

Quel est le moment de fléchissement de la base d'une antenne radio cylindrique de diamètre $D = 7{,}6$ cm et de hauteur $H = 1{,}8$ m placée sur une voiture allant à $U = 130\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ dans les conditions standards ($\nu = 1{,}4\times10^{-5}\,\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$, $\rho = 1{,}2\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$) ?

Solutions

10.1 Les expressions des traînée et portance totales s'écrivent comme (voir équations (10.2) et (10.3)) :

$$\begin{cases} L = L_p + L_f = \displaystyle\iint_A -p\ \mathrm{d}A\ \sin\theta + \iint_A \tau\ \mathrm{d}A\ \cos\theta \\ T = T_p + T_f = \displaystyle\iint_A p\ \mathrm{d}A\ \cos\theta + \iint_A \tau\ \mathrm{d}A\ \sin\theta \end{cases}$$

1er cas : (a)

Figure 10.20 $\theta = 90°$ (partie haute)

$\theta = 270°$ (partie basse)

y

$\vec{u}$

$P = P(x)$

$\theta = 90°$

$\vec{u}$

$\theta = 270°$

Pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{3\pi}{2}$, on a $L_f = T_p = 0$ et :

$$\begin{cases} L = \displaystyle\iint_{haut} -p\ \mathrm{d}A + \iint_{bas} p\ \mathrm{d}A = 0 \\ T = \displaystyle\iint_{haut} \tau\ \mathrm{d}A + \iint_{bas} \tau\ \mathrm{d}A = 2\iint_{haut} \tau\ \mathrm{d}A \end{cases}$$

Par symétrie, la distribution de pression est identique sur les surfaces du haut et du bas mais les forces de pression sont opposées. Par conséquent, la portance est nulle.

Application numérique :

$$T = 2\times5\times10^{-4}\int_0^{1,2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\,b = 60\times10^{-4}\left[\sqrt{x}\right]_0^{1,2} = 65{,}7\times10^{-4}\ \text{N}$$

La contrainte visqueuse (ou de cisaillement) reste très faible.

2e cas : (b)

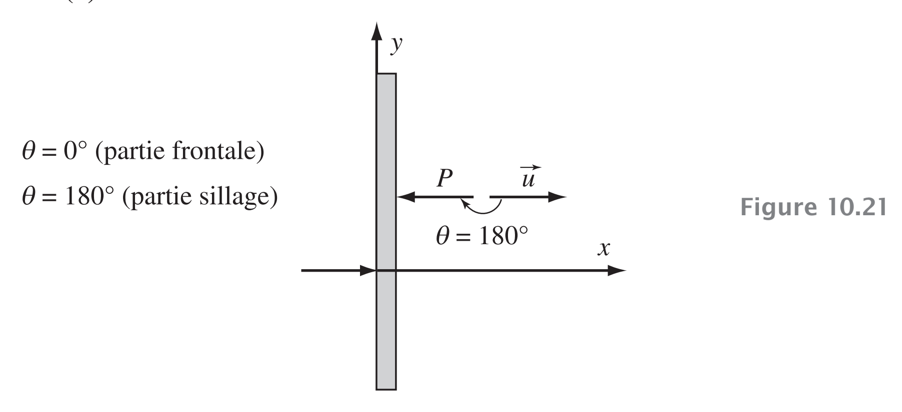


Figure 10.21

Pour $\theta = 0$ ou π, on a $L_p = T_f = 0$ et :

$$\begin{cases} L = \displaystyle\iint_{front} \tau \, \mathrm{d}A - \iint_{sillage} \tau \, \mathrm{d}A = 0 \\ T = \displaystyle\iint_{front} p \, \mathrm{d}A - \iint_{sillage} p \, \mathrm{d}A \end{cases}$$

Les contraintes de cisaillement sont symétriques par rapport au centre de la plaque. Par conséquent, ces contraintes s'annulent deux à deux sur les deux faces et la portance totale est donc nulle. On peut écrire la traînée :

$$T = \underbrace{\iint_{y=-0,6}^{0,6} \left[0,03\left(1-\frac{y^2}{0,36}\right)\right] b \, \mathrm{d}y}_{\text{frontale}} - \underbrace{\iint_{y=-0,6}^{0,6} -0,35 \, b \, \mathrm{d}y}_{\text{sillage}}$$

$$= 0,09\left[y - \frac{y^3}{1,08}\right]_{-0,6}^{0,6} + 1,05[0,6+0,6] = 1,33 \text{ N}$$

La traînée due à l'effort de pression est dans ce cas très grande par rapport à celle trouvée dans le cas de la plaque horizontale.

10.2

1. La force de traînée est donnée par : $T = C_D \dfrac{\pi D^2}{4} \dfrac{\rho U^2}{2}$

Le nombre de Reynolds pour la balle de golf est donné par :

$$Re^{golf} = \frac{UD}{\nu} = \frac{60 \times 4,25 \times 10^{-2}}{1,4 \times 10^{-5}} = 1,82 \times 10^5$$

Et celui pour la balle de tennis :

$$Re^{tennis} = \frac{UD}{\nu} = \frac{18 \times 3{,}75 \times 10^{-2}}{1{,}4 \times 10^{-5}} = 4{,}8 \times 10^{4}$$

D'après la figure ci-dessus, on a : $\begin{cases} C_D^{golf\ standard} \approx 0{,}25 \\ C_D^{golf\ lisse} \approx 0{,}51 \\ C_D^{tennis} \approx 0{,}5 \end{cases}$

D'où :

$$\begin{cases} T^{golf\ standard} = \dfrac{1}{2} \times 1{,}2 \times 60^2 \times \dfrac{\pi \times (4{,}25 \times 10^{-2})^2}{4} \times 0{,}25 = 0{,}76\ N \\ T^{golf\ lisse} \approx \dfrac{1}{2} \times 1{,}2 \times 60^2 \times \dfrac{\pi \times (4{,}25 \times 10^{-2})^2}{4} \times 0{,}51 = 1{,}56\ N \\ T^{tennis} \approx \dfrac{1}{2} \times 1{,}2 \times 18^2 \times \dfrac{\pi \times (3{,}75 \times 10^{-2})^2}{4} \times 0{,}5 = 0{,}107\ N \end{cases}$$

2. Les décélérations correspondantes sont de la forme : $a = T/m = gT/$Poids et donc : $a/g = T/$Poids.

D'où : $\begin{cases} \left(\dfrac{a}{g}\right)^{golf\ standard} = \dfrac{0{,}76}{0{,}44} = 1{,}72 \\ \left(\dfrac{a}{g}\right)^{golf\ lisse} = \dfrac{1{,}56}{0{,}44} = 3{,}54 \\ \left(\dfrac{a}{g}\right)^{tennis} = \dfrac{0{,}107}{0{,}025} = 4{,}28 \end{cases}$

Conclusions :

- La décélération est plus petite pour une balle de golf standard qu'une balle de golf lisse.
- La balle de golf avec une rugosité produit de la portance qui l'entraîne plus loin qu'une balle de golf lisse.
- En fait la balle de tennis à une vitesse de 60m/s aura une décélération très importante $(a/g)^{tennis} \approx 48$. Elle n'ira donc pas aussi loin qu'une balle de golf.

10.3 Pour les conditions de vol stationnaire, il y a équilibre entre le poids et la portance :

$$\text{Poids } (P) = \text{Portance}(L) = C_L\ S\ \frac{\rho U^2}{2}$$

D'où $$C_L = \frac{2\ P}{\rho U^2 S}$$

avec $\begin{cases} S = bc = 28{,}8 \times 2{,}25 = 64{,}8\ \text{m}^2 \\ P = 932\ \text{N} \end{cases} \Rightarrow C_L = \dfrac{2 \times 932}{1{,}2 \times 4{,}5^2 \times 64{,}8} = 1{,}18$

(et donc $\dfrac{C_L}{C_D} = \dfrac{1{,}18}{0{,}046} = 25{,}65$).

(Puissance fournie par le pilote) × (rendement) = (Puissance requise pour vaincre la traînée).

$$\Rightarrow \eta\ P_{uis} = T \times U \text{ et } T = C_D\ S\ \frac{\rho U^2}{2},$$

d'où :

$$P_{uis} = \frac{T\ U}{\eta} = C_D \frac{\rho\ S\ U^3}{2\eta} = \frac{1{,}2 \times 64{,}8 \times 4{,}5^3 \times 0{,}046}{2 \times 0{,}8} = 203\ \text{W}$$

Comme on peut le voir la puissance est proportionnelle à la vitesse au cube. Si on double la vitesse, il faut une puissance 8 fois plus grande, ce qui est certainement en dehors des limites des conditions humaines.

10.4

$$W - F_A = T = C_D\ \rho \frac{S\,U^2}{2}$$

Où W est le poids de la balle, F_A est la force d'Archimède et T correspond à la traînée. Ici, le poids ne s'équilibre pas avec la force d'Archimède car on tient compte de la force de traînée.

Donc : $$W - \gamma \frac{\pi D^3}{6} = T = C_D\ \rho \frac{\pi\, D^2\, U^2}{8}$$

Soit : $$68 \times 9{,}81 - 1030 \times 9{,}81 \times \frac{\pi(0{,}45)^3}{6} = C_D \times 1030 \times \frac{\pi\, 0{,}45^2\, U^2}{8}$$

D'où : $$2{,}258 = C_D\ U^2.$$

Le nombre de Reynolds est : $Re = \dfrac{D\,U\,\rho}{\mu} = \dfrac{0{,}45 \times U \times 1030}{1{,}57 \times 10^{-3}} = 2{,}9 \times 10^5 \times U$

Pour trouver la vitesse on procède par itérations en choisissant des valeurs arbitraires mais sensées au départ :

Par exemple, on suppose que $C_D = 0{,}4 \ \Rightarrow\ U = 2{,}37\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

$\Rightarrow\ Re = 687\,300 \Rightarrow C_D \cong 0{,}07$ d'après la figure de l'exercice 10.3 en considérant la balle comme une sphère lisse.

Si $C_D = 0{,}07 \Rightarrow U = 5{,}68\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow Re = 1{,}64 \times 10^6 \Rightarrow C_D \cong 0{,}125$ (d'après la figure de l'exercice 10.3)

D'où $U = 4{,}25\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow Re = 1{,}23 \times 10^6 \Rightarrow C_D \cong 0{,}125$ (d'après la figure de l'exercice 10.3).

On peut arrêter les calculs à ce niveau si on estime que la précision est atteinte entre les deux dernières itérations, ce qui est le cas ici.

10.5 La vitesse est $U = \left(\dfrac{130 \times 10^3}{3\,600}\right) = 36{,}1\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

Le nombre de Reynolds est : $Re = \dfrac{DU}{\nu} = \dfrac{7{,}6 \times 10^{-2} \times 36{,}1}{1{,}4 \times 10^{-5}} = 185714$ et d'après la Figure 10.8, $C_D \cong 1{,}15$.

Donc la force de traînée est égale à :

$$T = C_D\, \rho \frac{SU^2}{2} = 1{,}15 \times 1{,}2 \times 7{,}6 \times 10^{-2} \times 1{,}8 \times \frac{36{,}1^2}{2} = 123\ \text{N}$$

D'où le moment de fléchissement est égal à $M = T\,\dfrac{L}{2} = 123 \times \dfrac{1{,}8^2}{2} = 199{,}3\ \text{N} \cdot \text{m}$

Bibliographie

CANDEL S., *Mécanique des fluides*, DUNOD, 1990.

CHASSAING P., *Mécanique des fluides*, CEPADUES, 1997.

FAURE T., *Dynamique des fluides appliqué - Application à l'aérodynamique*, DUNOD, Paris, 2008.

KUNDU P. K., COHEN I. M., *Fluid Mechanics*, Elsevier Academic Press, Third Edition, 2004.

SCHLICHTING H., *Boundary-Layer theory*, McGRAW-Hill, 1979.

SOM S. K., BISWAS G., *Introduction to Fluid Mechanics and Fluid Machines*, Tata McGRAW-HILL Publishing Company Limited, New-Delhi, 2004.

STREETER V. L., *Handbook of fluid mechanics*, McGRAW-Hill, New York, 1961.

11 ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES – PROPAGATION D'ONDES

PLAN

OBJECTIFS

- Déterminer les équations de propagation d'une onde acoustique
- Définir la vitesse du son et le nombre de Mach
- Définir les conditions pour lesquelles on se trouve dans le cas d'un blocage sonique
- Étudier les changements des propriétés de l'écoulement à la traversée d'une onde de choc

11.1 INTRODUCTION

On considère un élément de fluide de volume V et la pression exercée sur cet élément fluide est P. La *compressibilité isotherm* χ_T définie au chapitre 1 s'écrit de la façon suivante :

$$\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \tag{11.1}$$

La compressibilité est une propriété des fluides. Les liquides ont une très faible valeur de la compressibilité (par exemple, la compressibilité de l'eau est de $5 \times 10^{-10}\, \text{m}^2 \cdot \text{N}^{-1}$ à une pression de 1 atm sous des conditions isothermes). L'équation (11.1) peut aussi s'écrire en termes de masse volumique :

$$\chi_T = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T \tag{11.2}$$

Il est connu qu'un fort gradient de pression est synonyme d'un écoulement à forte vitesse (cas des gaz). De tels écoulements où la masse volumique est variable sont connus comme des écoulements compressibles. Pour récapituler le Chapitre 1, le critère d'un écoulement incompressible ou compressible dépend du nombre de *Mach*, $Ma = U/c \ll 1$, où U est la vitesse d'écoulement et c la *vitesse du son* du fluide. Les différents régimes d'écoulement sont rappelés ci-dessous :

- $Ma < 0{,}3$: l'écoulement peut être considéré comme *incompressible*, la variation de la masse volumique avec la pression est négligeable ;
- $0{,}3 < Ma < 0{,}8$: l'écoulement est *subsonique* ($Ma < 1$), les variations de la masse volumique sont importantes mais il n'y a pas apparition d'ondes de choc ;
- $0{,}8 < Ma < 1{,}2$: l'écoulement est *transsonique*, les ondes de choc apparaissent et divisent l'écoulement en régions subsonique et supersonique. L'écoulement transsonique est caractérisé par des régions mixtes d'écoulements localement subsonique et supersonique.
- $1{,}2 < Ma < 3$: l'écoulement est *supersonique*, la vitesse d'écoulement est partout au-dessus de la vitesse du son. Les ondes de choc sont présentes à travers desquelles la ligne de courant change de direction de façon discontinue.
- $Ma > 3$: l'écoulement est *hypersonique* où la température, la pression et la masse volumique croissent de façon extrêmement importante à travers l'onde de choc.

11.2 VITESSE DU SON

Un pulse de pression dans un écoulement incompressible se comporte comme un corps rigide. Dans un fluide compressible, une masse déplacée comprime et accroît la masse volumique de la masse voisine qui à son tour accroît la masse volumique de celle-ci etc. Par conséquent, une petite perturbation sous forme d'une onde élastique (ou onde de pression) se propage à travers le milieu considéré. Si l'amplitude de cette onde est infinitésimale, elle est connue sous le nom d'onde acoustique.

La Figure 11.1 montre la propagation d'un pulse de pression se propageant à la vitesse « c » vers un milieu au repos ($U = 0$). Les propriétés du fluide au-devant de cette onde

sont P, T et ρ alors que celles derrière l'onde sont : $P + \mathrm{d}P$, $T + \mathrm{d}T$ et $\rho + \mathrm{d}\rho$. La vitesse du fluide dU générée et dirigée vers le milieu au repos est très faible. Afin de considérer une analyse stationnaire, on superpose une vitesse « c » dirigée vers la droite (Figure 11.1b) sur le système entier. L'onde peut donc être considérée comme stationnaire et le fluide apparaît avec une vitesse « c » à gauche et (c–dU) à droite. L'écoulement sur la Figure 11.1b) peut être considéré comme stationnaire et unidimensionnel à travers l'onde. Considérons S la surface du front d'onde. La conservation de la masse peut s'écrire : $\rho S c = (\rho + \mathrm{d}\rho) S (c - \mathrm{d}U)$, ce qui nous donne l'expression de la vitesse infinitésimale dU :

$$\mathrm{d}U = c\left[\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho + \mathrm{d}\rho}\right] \tag{11.3}$$

La relation montre que d$U > 0$ si d$\rho > 0$, ce qui veut dire qu'une onde de compression laisse derrière elle un fluide en mouvement dans le sens de l'onde (voir Figure 11.1a). De plus la vitesse du fluide dU est beaucoup plus petite que celle de la vitesse de l'onde « c ». Le théorème de quantité de mouvement sur le volume de contrôle de la Figure 11.1b implique la relation suivante :

$$PS - (P + \mathrm{d}P)S = S\rho c(c - \mathrm{d}U) - (S\rho c)c \tag{11.4}$$

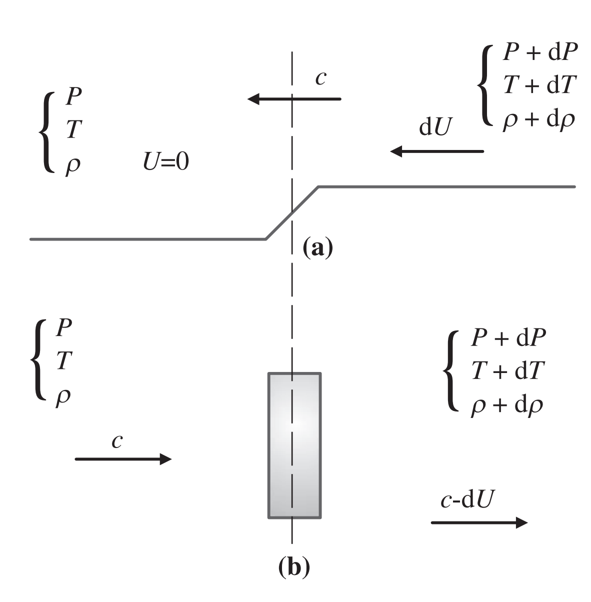


Figure 11.1 – **Propagation d'une onde acoustique (a) onde se propageant dans du fluide au repos, (b) onde stationnaire.**

Dans l'équation (11.4), $S\ \rho\ c$ est le débit-masse. En simplifiant, on obtient alors :

$$\mathrm{d}P = \rho c\,\mathrm{d}U \tag{11.5}$$

En combinant les équations (11.3) et (11.5), on a :

$$c^2 = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\left(1 + \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\right) \tag{11.6}$$

Et dans la limite $d\rho \to 0$, on peut écrire :

$$c^2 = \frac{dP}{d\rho} \tag{11.7}$$

Il faut noter que dans la limite d'une faible énergie de l'onde acoustique, il n'y a pas de gradients de part et d'autre de l'onde. Par conséquent, les effets de friction (irréversibles) sont confinés à l'intérieur de l'onde. De plus, le processus entier de propagation de l'onde est adiabatique car il n'y a pas de gradient de température excepté à l'intérieur de l'onde elle-même et la transformation peut être considérée réversible. D'où l'expression de la vitesse du son est :

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s} \tag{11.89}$$

« c » correspond en fait à la vitesse du son correspondant à la propagation de l'onde. Pour un gaz parfait ($P = \rho\ r\ T$) et dans le cas d'une transformation adiabatique (P/ρ^γ = constante, $\gamma = C_p/C_v$), on peut alors écrire la vitesse du son comme :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\gamma r T} \tag{11.9}$$

Pour l'air dans les conditions du niveau de la mer à une température de 15 °C, on obtient $c = 340\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

11.3 Équations de base pour un écoulement unidimensionnel

On considère un écoulement compressible supposé unidimensionnel à travers une section qui ne varie pas de façon significative. Soit $S(x)$ la section de passage et les propriétés du fluide peuvent être écrites comme suit : $P(x), \rho(x), U(x)$, etc.

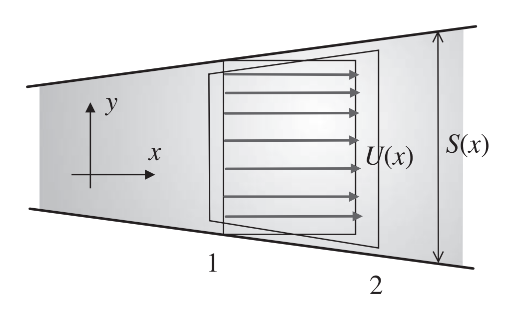


Figure 11.2 – **Modèle 1D.**

L'équation de continuité dans le cas 1D stationnaire peut être écrite sous la forme suivante :

$$\rho(x)U(x)S(x) = Q_m = cte \tag{11.10}$$

Par différentiation, on obtient :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dU}{U} + \frac{dS}{S} = 0 \tag{11.11}$$

Le premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert entre les points 1 et 2 (voir Figure 11.2) permet d'écrire que :

$$e_2 + \frac{U_2^2}{2} - e_1 - \frac{U_1^2}{2} = P_1 v_1 - P_2 v_2 + Q_{1\to 2} \tag{11.12}$$

où v_1 et v_2 correspondent aux volumes massiques aux points 1 et 2, e_1 et e_2 sont les énergies internes massiques (voir Chapitre 1), $P_1 v_1$ correspond au travail massique par l'environnement extérieur qui pousse le fluide dans le volume de contrôle, $P_2 v_2$ correspond au travail effectué par le fluide dans le volume de contrôle sur l'environnement extérieur en poussant le fluide hors du volume de contrôle et $Q_{1\to 2}$ est la quantité de chaleur échangée avec l'extérieur lorsque le fluide passe de l'état 1 à l'état 2. Sachant que $h = e + Pv$, on obtient alors :

$$h_2 + \frac{U_2^2}{2} = h_1 + \frac{U_1^2}{2} + Q_{1\to 2} \tag{11.13}$$

L'équation de *Bernoulli* peut être appliquée dans le cas d'écoulements non-visqueux et stationnaires pour le cas compressible :

$$\int \frac{dP}{\rho} + \frac{U^2}{2} = cte \tag{11.14}$$

On peut montrer que l'équation est équivalente à l'équation de l'énergie si on considère un écoulement non-visqueux et adiabatique (voir chapitre 5).

En appliquant le théorème de quantité de mouvement entre les sections 1 et 2, on obtient :

$$P_1 S_1 - P_2 S_2 + F = Q_m U_2 - Q_m U_1 \tag{11.15}$$

ou encore :

$$P_1 S_1 - P_2 S_2 + F = \rho_2 U_2^2 S_2 - \rho_1 U_1^2 S_1 \tag{11.16}$$

Où F est la résultante de la force suivant x exercée par le fluide sur les murs.

11.4 Point d'arrêt et vitesse du son

Les valeurs d'arrêt sont utiles pour des conditions de référence dans un écoulement compressible. Supposons que les propriétés de l'écoulement (telles que T, P, ρ, etc.) soient connues en un point. Les conditions d'arrêt correspondent aux conditions pour lesquelles la vitesse devient nulle de façon isentropique. L'enthalpie d'arrêt (indice « *0* ») est définie par : $h_0 = h + U^2/2$. Pour un gaz parfait :

$$C_p T_0 = C_p T + \frac{U^2}{2} \tag{11.17}$$

ce qui donne :

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{U^2}{2C_pT} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2}\frac{U^2}{\gamma rT} \tag{11.18}$$

ou :

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2}Ma^2 \tag{11.19}$$

Si on connaît la température locale T et le nombre de Mach, nous pouvons déterminer la température d'arrêt T_0. Les relations isentropiques peuvent être utilisées pour déterminer la pression et la densité d'arrêt :

$$\frac{P_0}{P} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2}Ma^2\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{11.20}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2}Ma^2\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{11.21}$$

L'écoulement est sonique lorsque le nombre de Mach est égal à 1 (notons alors les propriétés critiques P^*, ρ^*, c^*et T^*). On obtient ces propriétés lorsque le fluide en expansion ou en compression atteint $Ma = 1$. On a vu que l'enthalpie totale, donc T_0 est conservée lorsque la transformation est adiabatique quels que soient les effets visqueux. La pression d'arrêt P_0 et la densité d'arrêt ρ_0 décroissent lorsqu'il y a les effets de friction. D'après l'équation (11.18) pour un écoulement adiabatique :

$$U = \left[\frac{2\gamma r}{\gamma - 1}(T_0 - T)\right]^{1/2} \tag{11.22}$$

L'écoulement atteint la vitesse maximale lorsque la température est théoriquement nulle :

$$U_{max} = \left[\frac{2\gamma rT_0}{\gamma - 1}\right]^{1/2} \tag{11.23}$$

Pour un écoulement atteignant $Ma = 1$, les équations (11.19) à (11.21) peuvent s'écrire :

$$\frac{T_0}{T^*} = \frac{\gamma + 1}{2} \tag{11.24}$$

$$\frac{P_0}{P^*} = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{11.25}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho^*} = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{11.26}$$

Pour les gaz diatomiques, comme l'air par exemple, $\gamma = 1{,}4$ et par conséquent : $T_0/T^* = 0{,}8333$, $P_0/P^* = 0{,}5285$ et $\rho_0/\rho^* = 0{,}6339$. Pour les conditions soniques, la vitesse de l'écoulement est égale à la vitesse du son : $U^* = c^* = [\gamma rT^*]^{1/2}$, ce qui donne :

$$U^* = \left[\frac{2\gamma r T_0}{\gamma + 1}\right]^{1/2} \tag{11.27}$$

11.5 Effets de la variation de la section sur les propriétés de l'écoulement dans le cas isentropique

Nous allons déterminer l'effet de la variation de la section S sur la vitesse et la pression. À partir de l'équation (11.14), on peut écrire :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\rho} + \mathrm{d}\left(\frac{U^2}{2}\right) = 0 \text{ ou } \frac{\mathrm{d}P}{\rho U^2} = -\frac{\mathrm{d}U}{U} \tag{11.28}$$

L'équation de continuité donne :

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = -\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} - \frac{\mathrm{d}U}{U} \tag{11.29}$$

et par conséquent :

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = +\frac{\mathrm{d}P}{\rho U^2} - \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} \tag{11.30}$$

ou alors :

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = +\frac{\mathrm{d}P}{\rho U^2}\left[1 - \frac{U^2}{\mathrm{d}P/\mathrm{d}\rho}\right] \tag{11.31}$$

Et donc pour une transformation isentropique :

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \frac{\mathrm{d}P}{\rho U^2}\left[1 - \frac{U^2}{c^2}\right] = \frac{\mathrm{d}P}{\rho U^2}[1 - Ma^2] = -\frac{\mathrm{d}U}{U}[1 - Ma^2] \tag{11.32}$$

Les équations (11.28) et (11.32) nous disent que pour $Ma < 1$, un changement de section entraîne un changement de pression avec le même signe. Pour $Ma > 1$, un changement de section provoque un changement de pression de signe opposé.

De plus pour $Ma < 1$, un changement de section provoque un changement de vitesse de signe opposé et le contraire pour le cas $Ma > 1$. Ceci est résumé sur la Figure 11.3 et les conclusions suivantes peuvent être dressées pour un écoulement compressible dans une tuyère à *section variable* :

- Pour des vitesses *subsoniques* ($Ma < 1$), une diminution de section accroît la vitesse d'écoulement. Une tuyère subsonique doit avoir un profil convergent et un diffuseur subsonique un profil divergent. Les caractéristiques pour ce régime d'écoulement ($Ma < 1$) sont qualitativement les mêmes que pour un écoulement incompressible.
- Pour les écoulements *supersoniques* ($Ma > 1$), les effets sont différents et opposés. Une tuyère supersonique doit être construite avec une section qui augmente dans la direction de l'écoulement. Un *diffuseur* supersonique doit être un canal convergent.

Des tuyères divergentes sont utilisées pour produire un écoulement supersonique dans les missiles et les lanceurs.

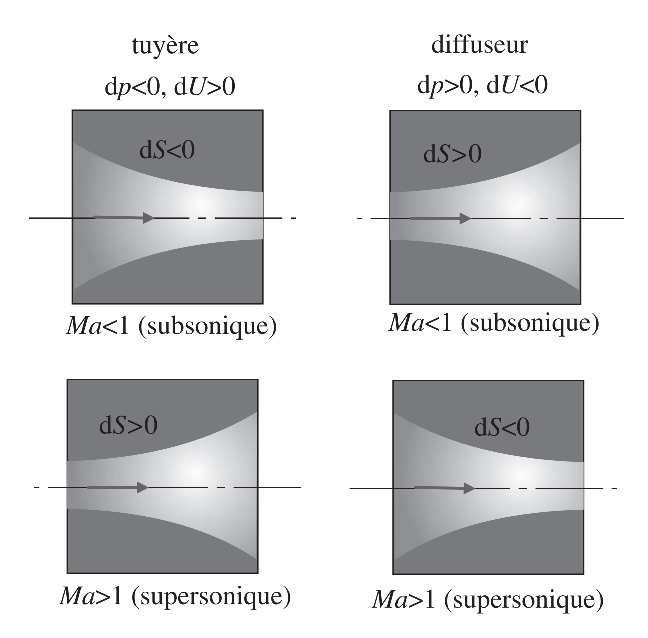


Figure 11.3 – Formes de tuyères dans les régimes d'écoulement subsonique et supersonique.

Supposons une tuyère utilisée pour obtenir un flux supersonique avec un écoulement à très basse vitesse à l'entrée (voir Figure 11.4). Le nombre de Mach va croître de $Ma = 0$ près de l'entrée à $Ma > 1$ à la sortie. Il est clair que la tuyère doit converger dans la portion subsonique et diverger dans celle supersonique. Une telle tuyère est appelée tuyère convergente-divergente (ou tuyère de *Laval*). Comme montré sur la Figure 11.4, le nombre de Mach doit être égal à 1 au col puisque la section ne croît ni ne décroît à cet endroit. D'après l'équation (11.32), dU est non nul au *col* seulement si $Ma = 1$. Par conséquent, la vitesse sonique ne peut être atteinte qu'au col d'une tuyère ou d'un diffuseur.

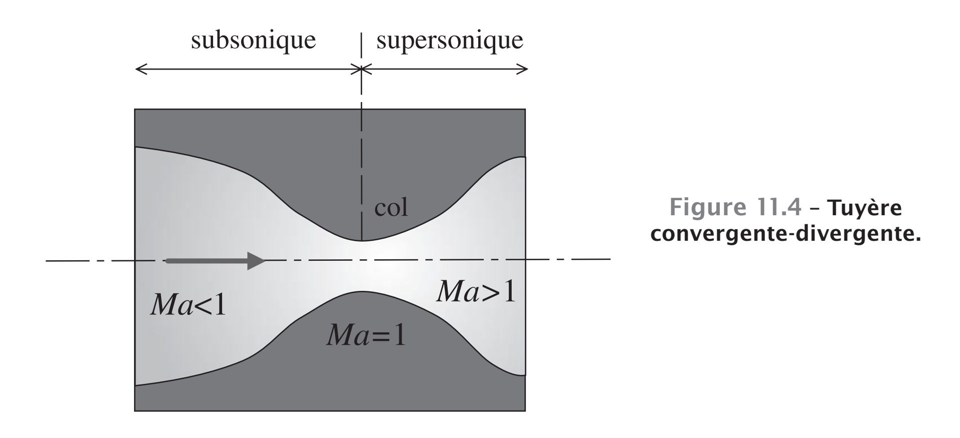


Figure 11.4 – Tuyère convergente-divergente.

Cependant, la condition $Ma \neq 1$ au col implique que d$U = 0$. Par exemple, l'écoulement dans une conduite convergente-divergente peut être subsonique partout avec un nombre de Mach qui augmente dans la partie convergente et qui diminue dans la partie divergente avec $Ma \neq 1$ au col (voir Figure 11.5a). De même l'écoulement peut être supersonique partout avec un nombre de Mach qui décroît dans la partie convergente et qui croît dans la partie divergente avec toujours $Ma \neq 1$ au col (voir Figure 11.5b).

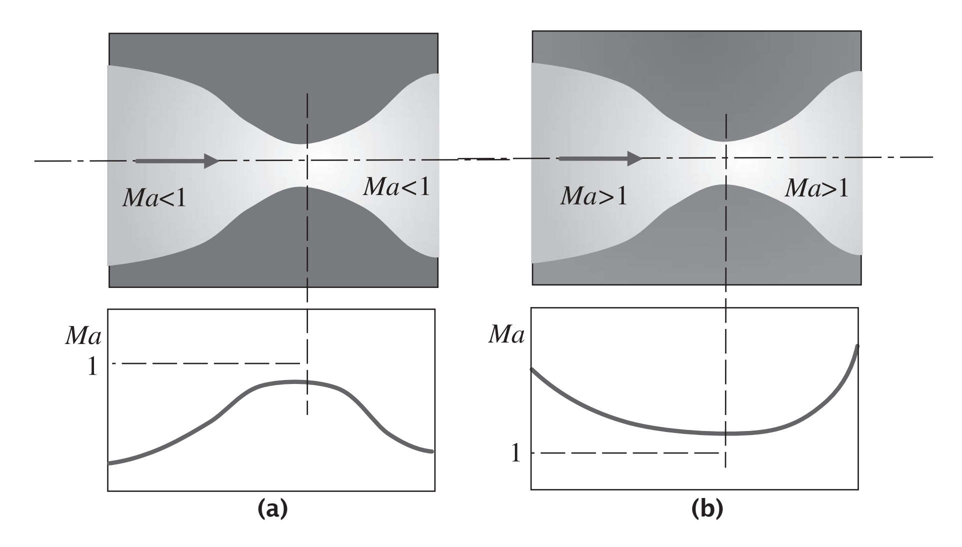


Figure 11.5 – Tuyère convergente-divergente avec $Ma \neq 1$ au col (a) cas subsonique partout (b) cas supersonique partout.

11.6 Écoulement isentropique dans une tuyère convergente

On considère l'écoulement d'un gaz parfait dans une tuyère convergente. Dans le cas isentropique, on peut écrire le débit-masse comme $Q_m = \rho U S$, ou alors :

$$\frac{Q_m}{S} = \frac{P}{rT} c Ma = \frac{P}{rT}\sqrt{\gamma r T}\, Ma = \frac{P}{\sqrt{T}}\sqrt{\frac{\gamma}{r}} Ma \qquad (11.33)$$

En faisant intervenir les quantités d'arrêt (P_0, T_0), on obtient :

$$\frac{Q_m}{S} = \frac{P}{P_0} P_0 \sqrt{\frac{T_0}{T}}\sqrt{\frac{1}{T_0}}\sqrt{\frac{\gamma}{r}} Ma = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}}\sqrt{\frac{T_0}{T}}\frac{P_0}{\sqrt{T_0}}\sqrt{\frac{\gamma}{r}} Ma = \sqrt{\frac{\gamma}{r}}\frac{P_0 Ma}{\sqrt{T_0}}\left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{-(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \qquad (11.34)$$

En utilisant la relation (11.19), on obtient finalement :

$$\frac{Q_m}{S} = \sqrt{\frac{\gamma}{r}}\frac{P_0 Ma}{\sqrt{T_0}}\frac{1}{\left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right]^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}} \qquad (11.35)$$

P_0, T_0, γ et r sont des constantes et par conséquent le débit-masse est seulement fonction du nombre de Mach. Il existe une valeur particulière de Ma pour laquelle Q_m/S est maximale :

$$\frac{d(Q_m/S)}{Ma} = \sqrt{\frac{\gamma}{r}}\frac{P_0}{T_0}\frac{1}{\left[1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right]^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}}$$

$$\sqrt{\frac{\gamma}{r}}\frac{P_0 Ma}{\sqrt{T_0}}\left[-\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}\left\{1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right\}^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}-1}\left\{\frac{\gamma-1}{2}Ma\right\}\right] = 0 \tag{11.36}$$

ou :

$$1 - \frac{Ma^2(\gamma+1)}{2\left[1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right]} = 0 \tag{11.37}$$

La résolution de cette dernière équation nous donne $Ma = 1$. Or on sait que $U = cMa = \sqrt{\gamma r T}Ma$. Par différentiation logarithmique, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}U}{U} = \frac{\mathrm{d}Ma}{Ma} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}T}{T} \tag{11.38}$$

Et d'après (11.19) et par différentiation logarithmique :

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} = -\frac{(\gamma-1)Ma^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2}\frac{\mathrm{d}Ma}{Ma} \tag{11.39}$$

Des équations (11.38) et (11.39) on obtient après simplification :

$$\frac{\mathrm{d}U}{U} = \frac{1}{1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2}\frac{\mathrm{d}Ma}{Ma} \tag{11.40}$$

Des équations (11.32) et (11.40), on a :

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \frac{(Ma^2-1)}{1+\frac{\gamma-1}{2}}\frac{\mathrm{d}Ma}{Ma} \tag{11.41}$$

En substituant $Ma = 1$, on obtient $\mathrm{d}S = 0$ ou $S = cte$. La condition $Ma = 1$ ne peut donc s'appliquer qu'au col et nulle part ailleurs et ceci avec un débit masse maximal, on dit alors que la tuyère est en condition de blocage sonique. Les propriétés au col sont appelées propriétés critiques et ont été déjà exprimées par les équations (11-24)-(11-26). En substituant la condition $Ma = 1$ dans (11.35), on obtient :

$$\frac{Q_m}{S^*} = \sqrt{\frac{\gamma}{r}}\frac{P_0}{\sqrt{T_0}}\frac{1}{\left[1+\frac{\gamma-1}{2}\right]^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}} \tag{11.42}$$

En divisant l'équation (11.42) par (11.35), on a finalement :

$$\frac{S}{S^*} = \frac{1}{Ma}\left\{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left[1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right]\right\}^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \qquad (11.43)$$

L'équation montre que, pour une valeur donnée de *Ma*, on a une valeur unique de S/S^*. La variation de S/S^* en fonction du nombre de Mach est montrée sur la Figure 11.6. En revanche pour une valeur donnée de S/S^* (autre que la valeur unité), il y a deux valeurs possibles du nombre de Mach, ce qui signifie qu'une tuyère supersonique est forcément divergente.

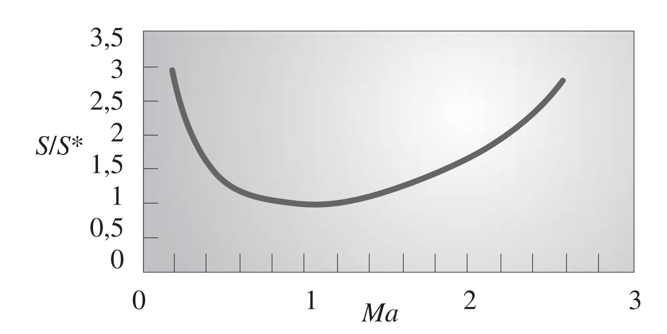


Figure 11.6 – Variation de S/S* en fonction de Ma pour γ = 1.4.

11.7 Distribution de pression et phénomène de blocage sonique dans une tuyère convergente

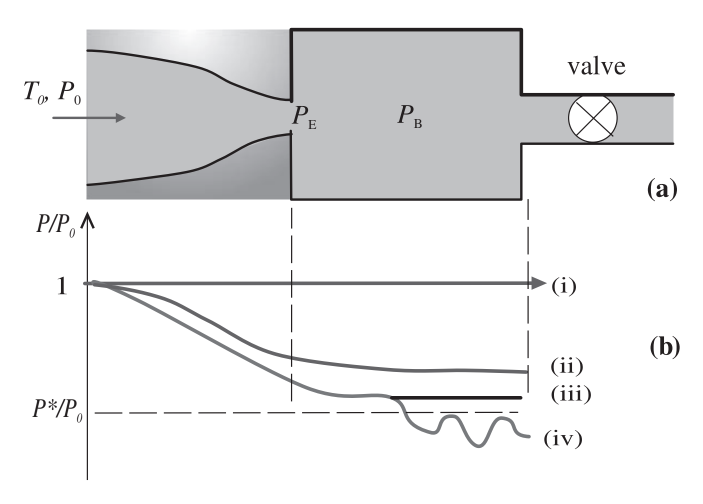


Figure 11.7 – (a) écoulement compressible à travers une tuyère convergente (b) distribution de pression correspondante suivant la longueur pour différentes valeurs de la pression P_B.

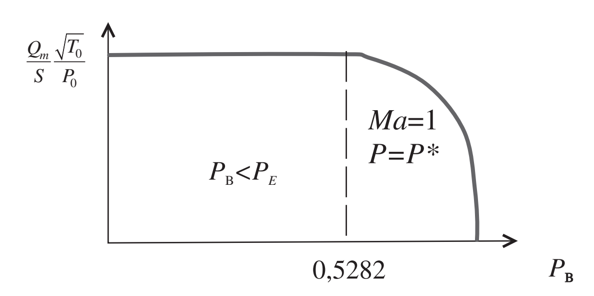


Figure 11.8 – Débit massique adimensionnel en fonction de la variation de pression P_B dans une tuyère convergente.

Considérons une tuyère convergente telle que représentée sur la Figure 11.7a. La Figure 11.7b montre le rapport de pression P/P_0 suivant la direction de la longueur de la tuyère. Les conditions d'entrée du gaz sont les valeurs d'arrêt (P_0, T_0) qui sont constantes. La pression à la sortie de la tuyère est notée P_E et la pression à l'arrière de la tuyère est notée P_B qui peut être variable avec l'ajustement de la valve. À la condition $P_0 = P_E = P_B$, il n'y aura pas d'écoulement dans la tuyère (condition (i) sur la Figure 11.7b). Lorsque P_B diminue graduellement, le débit-masse va augmenter et la pression diminuera dans la direction de l'écoulement (condition (ii) sur la Figure 11.7b). La pression à la sortie de la tuyère P_E restera égale à P_B jusqu'à ce que la condition de débit maximal soit atteinte. La condition (iii) illustre la distribution de pression dans un tel cas. Lorsque Q_m/S atteint la valeur maximale (pour $Ma = 1$) alors $P_E = P^*$. Dans la mesure où la tuyère n'a pas de section divergente, une diminution de P_B n'accélérera pas l'écoulement jusqu'à la condition supersonique. Par conséquent, la pression de sortie de tuyère P_E restera égale à P^*même si P_B peut diminuer. La courbe du débit-masse adimensionnel en fonction de la pression P_B à l'arrière de la tuyère est montrée sur la Figure 11.8. La valeur maximale de Q_m/S à $Ma = 1$ est connue sous le nom *débit bloqué* (ou phénomène de *blocage sonique*). En résumé, pour une tuyère donnée, le débit ne peut être augmenté d'avantage et par conséquent ni la pression à la sortie de la tuyère, ni le débit-masse ne sont affectés si on diminue P_B en dessous de P^*. Cependant, pour P_B plus faible que P^*, le fluide sortant de la tuyère doit se détendre afin d'avoir la valeur de la pression à l'arrière de la tuyère comme illustré par la condition (iv) de la Figure 11.7b. Ce processus de détente est tridimensionnel et la distribution de pression ne peut être prédite par la théorie unidimensionnelle. Les expériences montrent qu'il existe en fait une série d'ondes de choc qui se forment à la sortie de la tuyère.

11.8 Écoulement isentropique dans une tuyère convergente-divergente

On considère un écoulement dans une tuyère convergente-divergente (voir Figure 11.9). Les conditions d'arrêt en amont sont supposées constantes ; les notations sont identiques à celles de la Figure 11.7. En ouvrant la valve très doucement, la distribution de pression est celle montrée par la courbe (i). Un écoulement totalement subsonique apparaît. Ensuite la pression P_B est diminuée de façon à atteindre les conditions soniques au col

(courbe (ii)) et un débit-masse maximal. En réduisant d'avantage la pression P_B, l'écoulement à l'aval du col ne répond plus. Cependant, si la pression est réduite encore plus (cas (iii) et (iv)), l'écoulement devient initialement supersonique dans la section divergente mais s'ajuste ensuite à la pression P_B au moyen d'une onde de choc normale stationnaire à l'intérieur de la tuyère. La position de cette onde de choc se déplace en aval lorsque P_B décroît et pour la courbe (iv), elle se situe juste à la sortie de la tuyère. L'écoulement dans toute la partie divergente jusqu'à la sortie est maintenant supersonique. Lorsque la pression P_B est encore réduite (cas (v)), il n'y a plus d'*onde de choc normal* dans la tuyère et la pression du jet s'ajuste à P_B par la génération d'ondes de choc obliques à l'extérieur de la tuyère. Une tuyère convergente-divergente a pour but de générer un écoulement supersonique près de la sortie. Si P_B est celle qui se trouve à (v) alors l'écoulement sera complètement isentropique sur toute la tuyère et supersonique à la sortie. Les fusées utilisent des tuyères convergentes-divergentes pour accélérer les gaz de sortie à une vitesse maximale pour produire de la *poussée*.

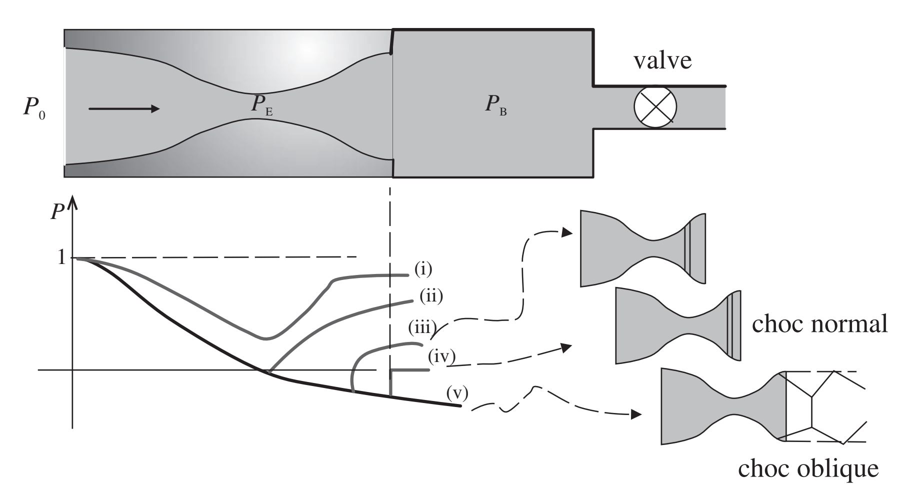


Figure 11.9 – Distribution de pression dans une tuyère convergente-divergente pour différentes valeurs de la pression P_B.

11.9 Onde de choc normal

Les ondes de choc représentent de très fortes irréversibilités localisées dans l'écoulement. Sur une distance de l'ordre du libre parcours moyen, l'écoulement passe d'un état supersonique à un état subsonique, la vitesse décroît subitement et la pression augmente de façon conséquente. En fait, l'onde de choc apparaît lorsqu'il y a une très forte diminution de la vitesse en aval de l'écoulement autour de l'objet considéré. Les ondes de choc normales (ou droites) sont perpendiculaires à l'écoulement et les ondes de choc obliques sont inclinées d'un angle déterminé. La formation d'onde de choc est possible aussi bien pour des écoulements confinés qu'externes. Les ondes de choc normales et inclinées peuvent interagir pour constituer un autre état d'onde de choc. Les deux types d'onde de choc (normale et inclinée) sont représentés sur la Figure 11.10.

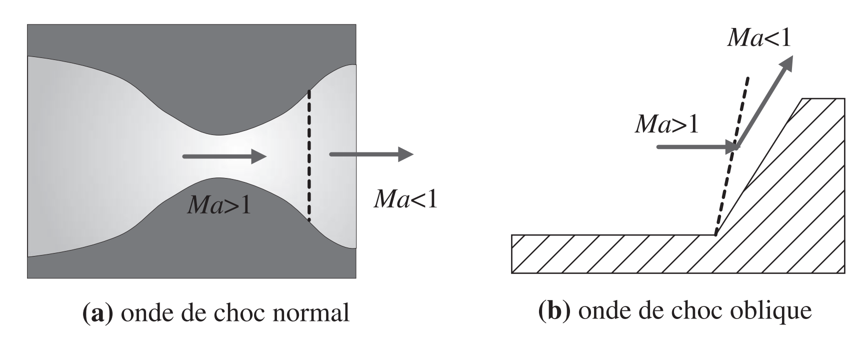


Figure 11.10 – **Différents types d'ondes de choc.**

La Figure 11.11 montre une surface de contrôle incluant une onde de choc droite. Le fluide est supposé thermodynamiquement en équilibre à l'amont et à l'aval du choc. L'équation de continuité peut alors s'écrire :

$$\frac{Q_m}{S} = \rho_1 U_1 = \rho_2 U_2 \tag{11.44}$$

L'équation de la quantité de mouvement (équation d'*Euler*) donne :

$$P_1 - P_2 = \frac{Q_m}{S}(U_2 - U_1) = \rho_1 U_2^2 - \rho_2 U_1^2 \tag{11.45}$$

L'équation (11.45) peut se mettre sous la forme suivante:

$$P_1 + \rho_1 U_1^2 = P_2 + \rho_2 U_2^2 \tag{11.46}$$

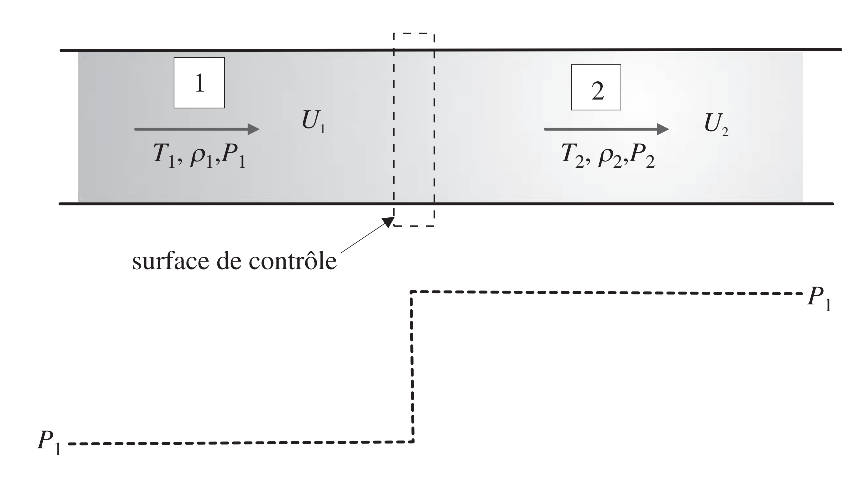


Figure 11.11 – **Onde de choc normal unidimensionnelle.**

La force $F = P + \rho U^2$ est appelée force d'*impulsion*. Enfin l'équation d'énergie peut s'écrire :

$$h_1 + \frac{U_1^2}{2} = h_2 + \frac{U_2^2}{2} = h_{01} = h_{02} = h_0 \tag{11.47}$$

où h_0 est l'enthalpie d'arrêt. À partir du second principe de la thermodynamique, on a : $s_2 - s_1 \geqslant 0$ où s est l'entropie massique. Dans le cas du gaz parfait, on peut écrire (voir équation 1.61 du Chapitre 1) :

$$ds = C_p \frac{dT}{T} - r\frac{dP}{P} \tag{11.48}$$

Pour un C_p constant, l'intégration de (11.48) donne :

$$s_2 - s_1 = C_p \ln\frac{T_2}{T_1} - r\ln\frac{P_2}{P_1} \tag{11.49}$$

Si toutes les quantités à l'état (1) (à l'amont du choc) sont connues alors nous avons 6 inconnues $(T_2, P_2, \rho_2, V_2, h_2, s_2)$ et 5 équations (continuité, mouvement, énergie, entropie et état). La 6e équation correspond à la relation qui lie la température à l'enthalpie (dans le cas d'un gaz parfait (relation vue au Chapitre 1) : $dh = C_p dT$).

11.10 Calcul des propriétés d'écoulement à travers un choc normal

Pour un gaz idéal, l'équation d'énergie peut être simplifiée par l'expression suivante :

$$T_{01} = T_{02} \tag{11.50}$$

En utilisant l'expression de la vitesse du son et l'équation d'état du gaz parfait, l'équation de continuité peut être réécrite en y incluant le nombre de Mach :

$$\frac{P_1}{rT_1} Ma_1\sqrt{\gamma r T_1} = \frac{P_2}{r\,T_2} Ma_2\sqrt{\gamma\, r\, T_2} \tag{11.51}$$

et dans l'équation de mouvement :

$$P_1 + \frac{P_1}{r\,T_1}U_1^2 = P_2 + \frac{P_2}{r\,T_2}U_2^2 \tag{11.52}$$

Par conséquent :

$$P_1\left(1 + \gamma Ma_1^2\right) = P_2\left(1 + \gamma Ma_2^2\right) \tag{11.53}$$

En écrivant cette dernière équation comme le rapport des pressions statiques à travers l'onde de choc, on obtient :

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\left(1 + \gamma Ma_1^2\right)}{\left(1 + \gamma Ma_2^2\right)} \tag{11.54}$$

Comme vu précédemment, le nombre de Mach d'une onde de choc normale est toujours plus grand que l'unité à l'aval de l'écoulement et plus petit que l'unité en amont de cet écoulement. Par conséquent, la pression augmente toujours à travers l'onde de choc.

L'équation d'énergie peut être écrite en termes de température et de nombre de Mach en utilisant la relation de la température d'arrêt :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[1 + (\gamma - 1)/2]Ma_1^2}{[1 + (\gamma - 1)/2]Ma_2^2} \tag{11.55}$$

En substituant les équations (11.54) et (11.55) dans l'équation (11.51), on obtient une relation liant les nombres de Mach en amont et en aval de l'onde de choc normal :

$$\frac{Ma_1}{1 + \gamma Ma_1^2}\left[1 + \frac{(\gamma - 1)}{2}Ma_1^2\right]^{1/2} = \frac{Ma_1}{1 + \gamma Ma_2^2}\left[1 + \frac{(\gamma - 1)}{2}Ma_2^2\right]^{1/2} \tag{11.56}$$

En résolvant cette équation pour Ma_2 en fonction de Ma_1, on obtient deux solutions. La première est triviale, $Ma_1 = Ma_2$ qui signifie qu'il n'y a pas de choc à travers le volume de contrôle. L'autre solution est :

$$Ma_2^2 = \frac{(\gamma - 1)Ma_1^2 + 2}{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma - 1)} \tag{11.57}$$

Lorsque $Ma_1 = 1$ dans l'équation (11.57) alors $Ma_2 = 1$. Les équations (11.54) et (11.55) montrent aussi qu'il n'y aura pas d'augmentation de pression et de température à travers l'onde de choc. En fait, l'onde de choc correspondant à $Ma_1 = 1$ est l'onde acoustique à travers laquelle, par définition, les changements de température et de pression sont infinitésimaux. Par conséquent, on peut dire que l'onde acoustique représente une onde de choc normale dégénérée. On peut aussi combiner les équations (11.54) et (11.57) pour obtenir :

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1}Ma_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \tag{11.58}$$

Or

$$\frac{P_{0,2}}{P_{0,1}} = \left(\frac{P_{0,2}}{P_2}\right)\left(\frac{P_2}{P_1}\right)\left(\frac{P_1}{P_{0,1}}\right) \tag{11.59}$$

Et donc d'après (11.20) et (11.58) on obtient finalement :

$$\frac{P_{0,2}}{P_{0,1}} = \frac{\left(\frac{\gamma + 1}{2}Ma_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}Ma_1^2\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}}{\left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1}Ma_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \tag{11.60}$$

11.11 Onde de choc oblique

Les discontinuités dans les écoulements supersoniques ne sont pas toujours forcément normales à la direction de l'écoulement. Il existe aussi des chocs obliques qui sont inclinés par rapport à la direction de l'écoulement. Si on se réfère à la structure du choc autour d'un avion par exemple (voir Figure 11.12). Le segment de l'onde de choc immédiatement

face à cet avion se comporte comme un choc droit. L'*onde de choc oblique* résulte en fait de la conséquence de l'inclinaison de cette onde de choc par rapport à la direction à l'infini. On peut aussi donner l'exemple de cette inclinaison lors de l'écoulement supersonique dans une tuyère. En effet, près des parois, les effets visqueux peuvent entraîner une inclinaison de l'onde de choc qui reste droite loin des parois.

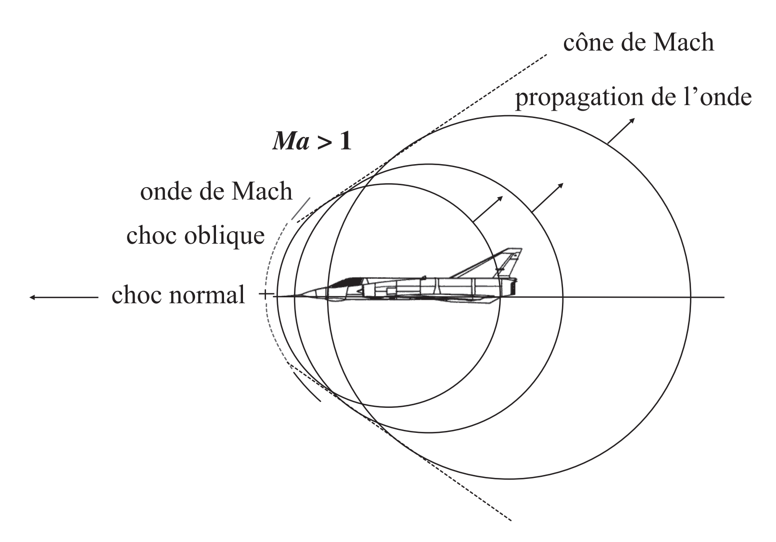


Figure 11.12 – Onde de choc normale et oblique face à un avion.

Considérons une onde de choc oblique bidimensionnelle comme illustré sur la Figure 11.13.

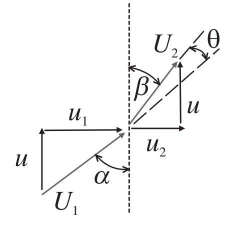


Figure 11.13 – Onde choc oblique bidimensionnelle.

Cette onde de choc oblique peut être considérée comme une onde de choc normale à laquelle on superpose une vitesse u (parallèle à l'onde de choc et égale de part et d'autre de l'onde de choc). Le changement à travers le front de l'onde de choc peut être déterminé de la même manière que pour l'onde de choc normale. Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie peuvent s'écrire :

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \tag{11.61}$$

$$\rho_1 u_1 (u_1 - u_2) = P_2 - P_1 \tag{11.62}$$

Ou

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} \tag{11.63}$$

Ces équations sont analogues à celles correspondant à l'onde de choc normale. En plus de ces équations, nous avons :

$$\frac{u_1}{c_1} = Ma_1 \sin\alpha \text{ et } \frac{u_2}{c_2} = Ma_2 \sin\beta \tag{11.64}$$

Avec les relations ci-dessus, on peut écrire toutes les relations d'onde de choc normale en remplaçant simplement Ma_1 et Ma_2 par $Ma_1 \sin\alpha$ et $Ma_2 \sin\beta$ respectivement. On obtient alors:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} Ma_1^2 \sin^2\alpha - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \tag{11.65}$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1) Ma_1^2 \sin^2\alpha} \tag{11.66}$$

$$Ma_2^2 \sin^2\beta = \frac{2 + (\gamma-1) Ma_1^2 \sin^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha(\tan\beta \,/\, \tan\alpha)} \tag{11.67}$$

On peut noter que même si $Ma_2 \sin\beta < 1$, Ma_2 peut être supérieur à 1. Donc un écoulement derrière une onde de choc oblique peut être supersonique bien que la composante normale de la vitesse soit subsonique. Pour obtenir l'angle de déflexion de l'écoulement passant à travers une onde de choc oblique, on peut utiliser la relation suivante :

$$\tan\theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta} = \frac{\tan\alpha - (\tan\beta \,/\, \tan\alpha)\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha(\tan\beta \,/\, \tan\alpha)} \tag{11.68}$$

En substituant $\tan\beta \,/\, \tan\alpha$ à partir de l'équation (11.66), on obtient finalement :

$$\tan\theta = \frac{Ma_1^2 \sin 2\alpha - 2\cot\alpha}{Ma_1^2(\gamma + \cos 2\alpha) + 2} \tag{11.69}$$

Il est intéressant de concevoir l'objet (par exemple un avion) de telle sorte qu'une onde de choc oblique soit préférable par rapport à une onde de choc normale. Les pertes dans le cas oblique sont moindres par rapport à celles du cas normal. C'est la raison pour laquelle l'angle du fuselage d'un avion supersonique est petit afin de préférer une onde de choc oblique.

Exercices

11.1 Vitesse du son

Déterminer la vitesse du son dans l'air pour un jour chaud d'été lorsque la température est de 38 °C et pour un jour froid d'hiver lorsque la température est de –30 °C.

11.2 Écoulement isentropique dans une tuyère

On considère l'écoulement isentropique du dioxyde de carbone dans une tuyère tel représenté sur la figure ci-dessous. À la section (1) de cet écoulement, la température est $T_1 = 60\,°C$ et la vitesse $U_1 = 350$ m · s^{-1}. Déterminer la vitesse U_2 à la section (2) où le nombre de Mach $M_{a2} = 2$. Calculer alors le rapport des sections S_2 / S_1.

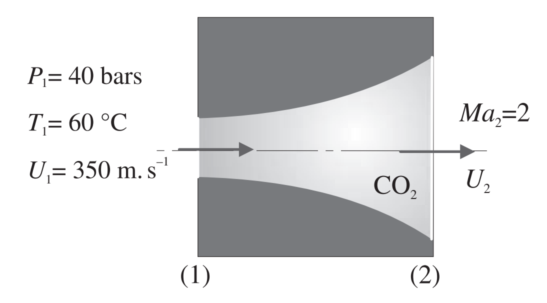
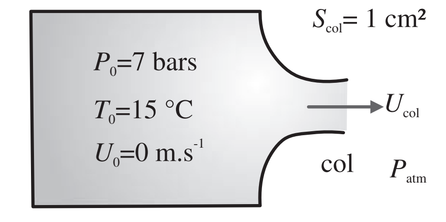


Figure 11.16 – Écoulement dans une tuyère.

11.3 Détente isentropique

Un gaz idéal à la pression P_0 = 7 bars et à la température T_0 = 15 °C s'écoule de façon isentropique à partir d'un grand réservoir de stockage à travers une tuyère convergente directement à l'atmosphère. La surface au col du conduit est de 1 cm^2. Déterminer la pression, température, vitesse et débit-masse du gaz au col du conduit si le gaz est (a) de l'air, (b) du dioxyde de carbone et (c) de l'hélium.

Figure 11.14 – Écoulement à travers un conduit de réservoir.



11.4 Variation de pression dans une onde de choc

De l'air dans les conditions standards entre dans une tuyère avec une vitesse subsonique et accélère de façon isentropique jusqu'à une vitesse supersonique (voir figure ci-dessous). Si le rapport entre la surface de sortie et celle au col est de 3, déterminer le rapport

de la pression aval à la sortie P_{aval} à la pression totale à l'entrée qui résultera à une onde de choc normale à la sortie de la tuyère. Déterminer aussi la perte de pression totale à travers l'onde de choc normale en kPa.

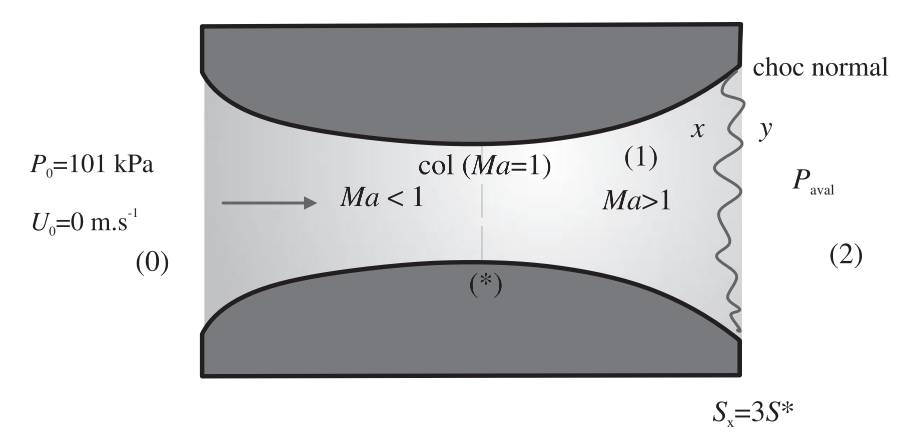


Figure 11.15

Solutions

11.1 Pour un gaz parfait, la vitesse du son s'écrit $c = \sqrt{\gamma r T}$ où pour l'air $\gamma = 1{,}4$ et :

$$r = \frac{R}{M} = \frac{8{,}32}{29 \times 10^{-3}} = 287 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Donc :

$$c_{38°C} = \sqrt{1{,}4 \times 287 \times (273 + 38)} = 353{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Et :

$$c_{-30°C} = \sqrt{1{,}4 \times 287 \times (273 - 20)} = 318{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

11.2 On a $U_2 = M_{a_2} c_2 = M_{a_2} \sqrt{\gamma r T_2}$

Or pour le CO_2, $\gamma = 1{,}3$ et $r = 188{,}9 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

De plus, d'après l'équation , $\dfrac{T_{0,2}}{T_2} = 1 + \dfrac{\gamma - 1}{2} Ma_2^2$ et $\dfrac{T_{0,1}}{T_1} = 1 + \dfrac{\gamma - 1}{2} Ma_1^2$ où pour un écoulement isentropique $T_{0,2} = T_{0,1}$. En divisant ces équations, on obtient alors :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \dfrac{\gamma - 1}{2} Ma_1^2}{1 + \dfrac{\gamma - 1}{2} Ma_2^2}.$$

Or $$Ma_1 = \frac{U_1}{\sqrt{\gamma r T_1}} = \frac{350}{\sqrt{1{,}3 \times 188{,}9 \times (273+60)}} = 1{,}22$$

Donc $$T_2 = (273+60)\frac{1+\dfrac{1{,}3-1}{2}\times 1{,}22^2}{1+\dfrac{1{,}3-1}{2}\times 2^2} = 255\text{K}$$

Par conséquent $$U_2 = 2\sqrt{1{,}3 \times 188{,}9 \times 255} = 500{,}5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Ce qui entraîne :

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\dfrac{S_2}{S^*}}{\dfrac{S_1}{S^*}} = \frac{\dfrac{1}{Ma_2}\left\{\left(\dfrac{2}{\gamma+1}\right)\left[1+\dfrac{\gamma-1}{2}Ma_2^2\right]\right\}^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}}{\dfrac{1}{Ma_1}\left\{\left(\dfrac{2}{\gamma+1}\right)\left[1+\dfrac{\gamma-1}{2}Ma_1^2\right]\right\}^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}} = \frac{Ma_1}{Ma_2}\left[\frac{1+\dfrac{\gamma-1}{2}Ma_2^2}{1+\dfrac{\gamma-1}{2}Ma_1^2}\right]^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}$$

Avec $\dfrac{\gamma-1}{2} = 0{,}15$, $\dfrac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)} = 3{,}83$, $Ma_1 = 1{,}22$ et $Ma_2 = 2$, on obtient alors :

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{1{,}22}{2}\left[\frac{1+0{,}15\times 2^2}{1+0{,}15\times 1{,}22^2}\right]^{3{,}83} = 1{,}71$$

11.3 S'il y a blocage sonique à la sortie de la tuyère, alors la vitesse du fluide à la sortie est égale à la vitesse du son et la pression est égale à la pression critique P* et par conséquent d'après l'équation :

$$\frac{P_0}{P^*} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Si $P^* < P_{atm}$ alors il n'y a pas blocage sonique au niveau du col de la tuyère et $P_{col} = P_{atm}$. Si $P^* > P_{atm}$ alors il y a blocage sonique au niveau du col et $P_{col} = P^*$. En fait comme montré ci-dessous, dans les deux cas, il y a blocage sonique au niveau du col de la tuyère.

Pour l'air $\gamma = 1{,}4$, et donc :

$$P^* = 7\times 10^5 \times \left(\frac{2}{2{,}4}\right)^{1{,}4/0{,}4} = 3{,}7\times 10^5\,\text{Pa} > \text{P}_{atm} = 10^5\,\text{Pa}$$

Donc $$P_{col} = P^* = 3{,}7\times 10^5\,\text{Pa et } Ma_{col} = 1.$$

D'après l'équation : $T^* = T_{col} = T_0\dfrac{2}{\gamma+1} = (273+15)\times\dfrac{2}{1{,}4+1} = 240\text{ K}$

Soit alors :

$$U_{col} = Ma_{col}\,c_{col} = \sqrt{\gamma r T_{col}} = [1{,}4\times 287\times 240]^{1/2} = 310{,}5\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Finalement,

$$Q_m = \rho SU = \frac{P_{col}}{rT_{col}} S_{col} U_{col} = \frac{3{,}7 \times 10^5 \times 10^{-4} \times 310{,}5}{287 \times 240}$$

$$Q_m = 0{,}166 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

De façon similaire pour le dioxyde de carbone, $\gamma = 1{,}3$ et donc :

$$P^* = P_{col} = 7 \times 10^5 \times \left(\frac{2}{2{,}3}\right)^{1{,}3/0{,}3} = 3{,}82 \times 10^5 > P_{atm}$$

$$T^* = T_{col} = T_0 \frac{2}{\gamma + 1} = (273 + 15) \times \frac{2}{1{,}3 + 1} = 250{,}4 \text{ K}$$

Soit alors : $U_{col} = \sqrt{\gamma r T_{col}} = \left[1{,}3 \times \frac{8{,}32}{44{,}01 \times 10^{-3}} \times 250{,}4\right]^{1/2} = 248 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

et :

$$Q_m = \frac{P_{col}}{rT_{col}} S_{col} U_{col} = \frac{3{,}82 \times 10^5 \times 10^{-4} \times 248}{\frac{8{,}32}{44{,}01 \times 10^{-3}} 250{,}4} = 0{,}2 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

Pour l'hélium $\gamma = 1{,}66$ et donc :

$$P^* = P_{col} = 7 \times 10^5 \times \left(\frac{2}{2{,}66}\right)^{1{,}66/0{,}66} = 3{,}41 \times 10^5 \text{ Pa} > P_{atm}$$

$$T^* = T_{col} = T_0 \frac{2}{\gamma + 1} = (273 + 15) \times \frac{2}{1{,}66 + 1} = 213{,}54 \text{ K}$$

Soit alors :

$$U_{col} = \sqrt{\gamma r T_{col}} = \left[1{,}66 \times \frac{8{,}32}{4 \times 10^{-3}} \times 216{,}54\right]^{1/2} = 864{,}7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

et :

$$Q_m = \frac{P_{col}}{rT_{col}} S_{col} U_{col} = \frac{3{,}41 \times 10^5 \times 10^{-4} \times 864{,}7}{\frac{8{,}32}{4 \times 10^{-3}} \times 216{,}54} = 0{,}065 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

11.4 Pour un écoulement isentropique avec $S_x / S^* = 3{,}0$, on obtient $Ma_x = 2{,}64$ par itérations à partir de l'équation (11.43).
Et à partir de l'équation (11.20), on obtient :

$$\frac{P_x}{P_{0x}} = \left[\frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \left[\frac{1}{1 + \frac{1{,}4 - 1}{2} \times 2{,}64^2}\right]^{\frac{1{,}4}{1{,}4 - 1}} = 0{,}0471$$

Alors que : $\dfrac{P_{aval}}{P_{01}} = \dfrac{P_y}{P_{0x}} = \dfrac{P_y}{P_x}\dfrac{P_x}{P_{0x}}$ et d'après l'équation (11.58) :

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}Ma_x^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{2\times 1{,}4}{1{,}4+1}\times 2{,}64^2 - \frac{1{,}4-1}{1{,}4+1} = 7{,}96$$

Or $\quad P_0 = P_{0x} = P_{01}$ et donc : $\dfrac{P_{aval}}{P_0} = 7{,}96 \times 0{,}0471 = 0{,}375$

ou $\quad P_{aval} = 101\times 10^3 \times 0{,}375 = 37{,}9 \text{ kPa}$

Finalement d'après (11.59) :

$$\frac{P_{0,x}}{P_{0,y}} = \frac{\left(\dfrac{\gamma+1}{2}Ma_x^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(1+\dfrac{\gamma-1}{2}Ma_x^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(\dfrac{2\gamma}{\gamma+1}Ma_x^2 - \dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{1{,}4+1}{2}\times 2{,}64^2\right)^{\frac{1{,}4}{0{,}4}}\left(1+\dfrac{0{,}4}{2}\times 2{,}64^2\right)^{-\frac{1{,}4}{0{,}4}}}{\left(\dfrac{2{,}8}{2{,}4}\times 2{,}64^2 - \dfrac{0{,}4}{2{,}4}\right)^{\frac{1}{0{,}4}}} = 0{,}445$$

Et donc $P_{0,x} - P_{0,y} = P_{0,x}\left(1 - \dfrac{P_{0,y}}{P_{0,x}}\right) = 101\times[1-0{,}455] = 56{,}1 \text{ kPa}$

Bibliographie

CANDEL S., *Mécanique des fluides*, DUNOD, 1990.

CHASSAING P., *Mécanique des fluides*, CEPADUES, 1997.

DESJARDINS D., COMBARNOUS M., BONNETON N., *Mécanique des fluides-Problèmes résolus avec rappels de cours*, DUNOD, Paris, 2002.

FAURE T., *Dynamique des fluides appliqué - Application à l'aérodynamique*, DUNOD, Paris, 2008.

KUNDU P. K., COHEN I. M., *Fluid Mechanics*, Elsevier Academic Press, Third Edition, 2004.

MUNSON B. R., YOUNG D. F., OKIISHI T. H., *Fundamentals of Fluid Mechanics*, John Wiley & Son, 2002.

SOM S. K., BISWAS G., *Introduction to Fluid Mechanics and Fluid Machines*, Tata McGRAW-HILL Publishing Company Limited, New-Delhi, 2004.

ANNEXES MATHÉMATIQUES

TENSEURS

Soient $\boldsymbol{B} = \left(\vec{e}_i\right)_{i=1,2,3}$ la base orthonormée directe cartésienne de l'espace $\mathbb{R}^3$, $\vec{u} = u_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{3} u_i \vec{e}_i$ (convention de sommation de l'indice répétée), la vitesse en un point donné et P un scalaire représentant la pression par exemple. Le vecteur $\bar{u}$ est un tenseur d'ordre 1 et le tenseur d'ordre 2 est une matrice : $\overline{\overline{A}} = \left[A_{ij}\right]_{i,j=1,2,3}$.

Le produit contracté d'une matrice par un vecteur est un vecteur :

$$\vec{u} = \overline{\overline{A}} \cdot \vec{u} = A_{ij} u_j = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} A_{1j} u_j \\ \sum_{j=1}^{3} A_{2j} u_j \\ \sum_{j=1}^{3} A_{3j} u_j \end{pmatrix}$$

Le produit de deux matrices : $\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} = \left(A_{ik} B_{kj}\right)_{i,j=1,2,3}$ est une matrice. De même, le produit contracté de 2 vecteurs, $\vec{u} \otimes \vec{v} = \left[u_i v_j\right]_{i,j=1,2,3}$, est une matrice.

OPÉRATEURS

Coordonnées cartésiennes

On pose $B \equiv \left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ et $\vec{u} = u_x \overrightarrow{e_x} + u_y \overrightarrow{e_y} + u_z \overrightarrow{e_z}$.

Gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$$ est un vecteur.

$$\overline{\overline{\text{grad}}}\,\vec{u} = \overline{\overline{\nabla}}\,\vec{u} = \begin{bmatrix} \vec{\nabla} u_x \\ \vec{\nabla} u_y \\ \vec{\nabla} u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$ est une matrice.

Divergence

D'un vecteur : $\text{div}\,\vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \text{tr}\left(\overline{\overline{\nabla}}\vec{u}\right) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$ est un scalaire.

D'un tenseur :

$$\vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{A}} = \begin{bmatrix} \vec{\nabla} \cdot \overrightarrow{A_x} \\ \vec{\nabla} \cdot \overrightarrow{A_y} \\ \vec{\nabla} \cdot \overrightarrow{A_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}\right)_{i=1,2,3}$$ est un vecteur.

Laplacien

D'un scalaire : $\Delta f = \text{div}\left(\overrightarrow{grad} f\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ est un scalaire.

D'un vecteur : $$\vec{\Delta}\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}\right)_{i=1,2,3}$$ est un vecteur.

Rotationnel

$$\overrightarrow{rot}\vec{u} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_z}$$

Coordonnées cylindriques

On pose $B \equiv \left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z}\right)$ et $\vec{u} = u_r\overrightarrow{e_r} + u_\theta\overrightarrow{e_\theta} + u_z\overrightarrow{e_z}$.

Gradient

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$$

$$\overline{\overline{\nabla}}\vec{u} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} - \dfrac{u_\theta}{r} & \dfrac{\partial u_r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \dfrac{u_r}{r} & \dfrac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Divergence

$$\vec{\nabla}.\vec{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\,u_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Laplacien

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Rotationnel

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(r\,u_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$$

Coordonnées sphériques

On pose $B \equiv \left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\phi}\right)$ et $\vec{u} = u_r\overrightarrow{e_r} + u_\theta\overrightarrow{e_\theta} + u_\phi\overrightarrow{e_\phi}$.

Gradient

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{e_\phi}$$

$$\overline{\overline{\nabla}}\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{u_\phi \text{cotg}\theta}{r} \\ \frac{\partial u_\phi}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} & \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \,\text{cotg}\theta}{r} \end{bmatrix}$$

Divergence

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (u_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}$$

Laplacien

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

Rotationnel

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial\left(r\sin\theta u_\phi\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial\left(r u_\theta\right)}{\partial\phi}\right)\vec{e_r} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial u_r}{\partial\phi} - \frac{\partial\left(r\sin\theta u_\phi\right)}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(r u_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)\vec{e_\phi} \end{pmatrix}$$

Dérivée particulaire

Coordonnées cartésiennes

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_x\frac{\partial f}{\partial x} + u_y\frac{\partial f}{\partial y} + u_z\frac{\partial f}{\partial z}$$

Coordonnées cylindriques

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial f}{\partial z}$$

Coordonnées sphériques

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}$$

TENSEUR DES VITESSES DE DÉFORMATION

Coordonnées cartésiennes

$$\dot{\bar{\bar{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ & \dfrac{\partial u_y}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial z}\right) \\ \text{Sym} & & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Coordonnées cylindriques

$$\dot{\bar{\bar{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} - \dfrac{u_\theta}{r} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \dfrac{u_r}{r}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial z}\right) \\ \text{Sym} & & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Coordonnées sphériques

$$\dot{\bar{\bar{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} - \dfrac{u_\theta}{r} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u_\psi}{\partial z} - \dfrac{u_\psi}{r} + \dfrac{\partial u_\psi}{\partial r}\right) \\ & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{u_r}{r}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \psi} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\psi}{\partial \theta} - \dfrac{u_\psi \operatorname{cotg}\theta}{r}\right) \\ \text{Sym} & & \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u_\psi}{\partial \psi} + \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{u_\theta \operatorname{cotg}\theta}{r} \end{bmatrix}$$

CONSERVATION DE LA MASSE (ÉQUATION DE CONTINUITÉ)

Coordonnées cartésiennes

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = 0$$

Coordonnées cylindriques

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r u_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta}+\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}=0$$

Coordonnées sphériques

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial(\rho r^2 u_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho \sin\theta\, u_\theta)}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial(\rho u_\phi)}{\partial \phi}=0$$

Conservation de la quantité de mouvement

Coordonnées cartésiennes

($\vec{F}$: force de volume, $\vec{a}$: accélération)

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}+\dfrac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}+F_x=\rho a_x\\[2mm]
\dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\dfrac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}+F_y=\rho a_y\\[2mm]
\dfrac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y}+\dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}+F_z=\rho a_z
\end{cases}$$

Coordonnées cylindriques

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta}+\dfrac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z}+\dfrac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}+F_r=\rho a_r\\[2mm]
\dfrac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\dfrac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z}+2\dfrac{\sigma_{r\theta}}{r}+F_\theta=\rho a_\theta\\[2mm]
\dfrac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta}+\dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}+\dfrac{\sigma_{rz}}{r}+F_z=\rho a_z
\end{cases}$$

Coordonnées sphériques

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta}+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial \phi}+\dfrac{1}{r}\left(2\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{\phi\phi}+\sigma_{r\theta}\operatorname{cotg}\theta\right)+F_r=\rho a_r\\[2mm]
\dfrac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial \sigma_{\theta\phi}}{\partial \phi}+\dfrac{1}{r}\left(3\sigma_{r\theta}+(\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{\phi\phi})\operatorname{cotg}\theta\right)+F_\theta=\rho a_\theta\\[2mm]
\dfrac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_{\theta\phi}}{\partial \theta}+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi}+\dfrac{1}{r}\left(3\sigma_{r\phi}+2\sigma_{r\theta}\operatorname{cotg}\theta\right)+F_\phi=\rho a_\phi
\end{cases}$$

Equations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible

Coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) + F_x = \rho\dfrac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} \\ -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right) + F_y = \rho\dfrac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t} \\ -\dfrac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) + F_z = \rho\dfrac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

Coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial r} + \mu\left(\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r\,u_r)}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \dfrac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right) + F_r = \rho\left(\dfrac{\mathrm{d}u_r}{\mathrm{d}t} - \dfrac{u_\theta^2}{r}\right) \\ -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial\theta} + \mu\left(\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r\,u_\theta)}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta^2} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial u_r}{\partial\theta} + \dfrac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}\right) + F_\theta = \rho\left(\dfrac{\mathrm{d}u_\theta}{\mathrm{d}t} - \dfrac{u_\theta\,u_r}{r}\right) \\ -\dfrac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r\,u_z)}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2} + \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) + F_z = \rho\dfrac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

Coordonnées sphériques

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial r} + \mu\left(\Delta u_r - \dfrac{2u_r}{r^2} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta} - \dfrac{2}{r^2}u_\theta\mathrm{cotg}\theta - \dfrac{2}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial u_\phi}{\partial\phi}\right) + F_r = \rho\left(\dfrac{\mathrm{d}u_r}{\mathrm{d}t} - \dfrac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r}\right) \\ -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial\theta} + \mu\left(\Delta u_\theta + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial u_r}{\partial\theta} - \dfrac{u_\theta}{r^2\sin^2\theta} - \dfrac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial u_\phi}{\partial\phi}\right) + F_\theta = \rho\left(\dfrac{\mathrm{d}u_\theta}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_\theta\,u_r}{r} - \dfrac{u_\phi\,\mathrm{cotg}\theta}{r}\right) \\ -\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial p}{\partial\phi} + \mu\left(\Delta u_\phi - \dfrac{u_\phi}{r^2\sin^2\theta} + \dfrac{2}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial u_r}{\partial\phi} + \dfrac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\phi}\right) + F_\phi = \\ \qquad\qquad \rho\left(\dfrac{\mathrm{d}u_\phi}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_\phi\,u_r}{r} - \dfrac{u_\theta\,u_\phi\,\mathrm{cotg}\theta}{r}\right) \end{cases}$$

Relations usuelles

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\Delta f) = \Delta\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}f\right)$$

$$\vec{\nabla}(fg) = f\,\vec{\nabla}g + g\,\vec{\nabla}f$$

$$\overline{\overline{\nabla}}\left(f\,\vec{u}\right) = f\,\overline{\overline{\nabla}}\vec{u} + \vec{u}\otimes\vec{\nabla}f$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right) = \left(\overline{\overline{\nabla}}\vec{u}\right)^t\cdot\vec{v} + \left(\overline{\overline{\nabla}}\vec{v}\right)^t\cdot\vec{u}$$

$$\overline{\overline{\vec{\nabla}}}\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{\nabla}\left(\frac{u^2}{2}\right) + \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}\right) \wedge \vec{u}$$

$$\overline{\overline{\dot{\varepsilon}}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\vec{\nabla}}}\vec{u} + \left(\overline{\overline{\vec{\nabla}}}\vec{u}\right)^t\right)$$

$$\overline{\overline{\Omega}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\vec{\nabla}}}\vec{u} - \left(\overline{\overline{\vec{\nabla}}}\vec{u}\right)^t\right)$$

$$\overline{\overline{\vec{\nabla}}}\vec{u} = \overline{\overline{\dot{\varepsilon}}} + \overline{\overline{\Omega}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \mathrm{tr}\left(\overline{\overline{\vec{\nabla}}}\vec{u}\right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\Delta\vec{u}\right) = \Delta\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}\right) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(f\vec{u}\right) = f\vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}f$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(f\overline{\overline{A}}\right) = f\vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{A}} \cdot \vec{\nabla}f$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(f\overline{\overline{I}}\right) = \vec{\nabla}f$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{u} \otimes \vec{v}\right) = \vec{u}\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \overline{\overline{\vec{\nabla}}}\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\dot{\varepsilon}}} = \Delta\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}\right) = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\right) + \frac{1}{2}\Delta\vec{u}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\Omega}} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}\right)$$

$$\Delta f = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla}f\right)$$

$$\Delta\vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \left(\overline{\overline{\vec{\nabla}}}\vec{u}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{u}\right) - \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}\right)$$

$$\Delta\left(f\,g\right) = f\,\Delta g + g\,\Delta f + 2\vec{\nabla}f \cdot \vec{\nabla}g$$

$$\Delta\left(f\,\vec{u}\right) = f\,\Delta\vec{u} + \vec{u}\,\Delta f + 2\vec{\nabla}f \cdot \overline{\overline{\vec{\nabla}}}\vec{u}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla}f\right) = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\Delta\vec{u}\right) = \Delta\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}\right)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \left(f\,\vec{u}\right) = f \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{u} + \vec{\nabla}f \wedge \vec{u}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) = \vec{u}\vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \vec{v}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \overline{\overline{\vec{\nabla}}}\vec{u} \cdot \vec{v} - \overline{\overline{\vec{\nabla}}}\vec{v} \cdot \vec{u}$$

INTÉGRATION

Relation du gradient

$$\iint_S f\,\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_V \vec{\nabla} f\,\mathrm{d}V$$

Relation du rotationnel

$$\iint_S (\vec{n} \wedge \vec{u})\,\mathrm{d}S = \iiint_V \vec{\nabla} \wedge \vec{u}\,\mathrm{d}V$$

Relation de la divergence (Ostrogradsky)

$$\iint_S (\vec{u} \cdot \vec{n})\,\mathrm{d}S = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{u}\,\mathrm{d}V$$

Relation de Green

$$\iiint_V (f\,\Delta g - g\,\Delta f)\,\mathrm{d}V = \iint_S (f\,\vec{\nabla} g - g\,\vec{\nabla} f)\,\mathrm{d}S$$

Relations de Stokes

$$\int_C \vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \iint_S \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{u}\,\mathrm{d}S$$

$$\int_C f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \iint_S \vec{n} \cdot \vec{\nabla} f\,\mathrm{d}S \text{ (=0 si } S \text{ est fermée)}$$

INDEX

O

P

R

S

T

V

Z